MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori

SOLUZIONI TEMA A Padova 19/9/2003

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = \lambda,$$

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x(x-1)|}} & \text{per} \quad x \neq 0,\ x \neq 1, \\ 0 \quad \text{per } x = 0,\ x = 1. \end{cases}$$

Sol. Il dominio di f è tutto $\mathbf{R}$. Si ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0$, f decresce per $-\infty < x \leq 0$ e $\frac{1}{2} < x < 1$ e cresce per $x > 1$ e $0 < x < \frac{1}{2}$. In $x = \frac{1}{2}$ c'è un punto di max e $f\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^{-4}$. Quindi

$$\begin{cases} \lambda < 0 \quad \text{o} \quad \lambda \geq 1 \quad \text{nessuna sol.} \\ \lambda = 0 \quad \text{o} \quad \mathrm{e}^{-4} < \lambda < 1 \quad 2\,\text{sol.} \\ \lambda = \mathrm{e}^{-4} \quad 3\,\text{sol.} \\ 0 < \lambda < \mathrm{e}^{-4} \quad 4\,\text{sol.} \end{cases}$$

2) Dimostrare che l'equazione

$$ax^4 + bx + c = 0,$$

dove $a, b, c \in \mathbf{R}$, ha al massimo due soluzioni reali.

Sol. Si studia la funzione $f(x) = ax^4 + bx + c$. Se $a = 0$ la funzione interseca l'asse x in un solo punto. Se $a \neq 0$ si ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \text{sign}(a)\infty$. $f'(x) = 3ax^3 + b$ e $f' = 0$ per $x_o = \sqrt[3]{\frac{-b}{3a}}$. Tale punto è di massimo se $a < 0$ e di min se $a > 0$. Se $f(x_o) = 0$ c'è solo una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, altrimenti ce ne possono essere o due o nessuna.

3)a) Determinare, al variare di a > 0, $a \neq 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{a}^x + 1)^{\frac{1}{x}};$$

Sol. Sia $a < 1$, quindi $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{a}^x = 0$ e

$$\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{a}^x + 1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log(\mathrm{a}^x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}(\mathrm{a}^x + o(\mathrm{a}^x))} = 1;$$

sia $a > 1$, quindi $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{a}^x = +\infty$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log(\mathrm{a}^x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log\left(\mathrm{a}^x\left(1+\frac{1}{\mathrm{a}^x}\right)\right)} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left(x\log a + \log\left(1+\frac{1}{\mathrm{a}^x}\right)\right)} = \mathrm{a}.$$

b) determinare
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin^3\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}}.$$

Sol.
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin^3\tfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}} \underset{t=\frac{1}{x}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{t\to0^+}\mathrm{e}^{(t-\sin t)\log\sin^3 t}=$$
$$\lim_{t\to0^+}\mathrm{e}^{(t-t+\frac{t^3}{3!}+o(t^3))\log(t^3+o(t^3))}=1.$$

4)4) Calcolare
$$\int_0^1 x^2\mathrm{a}^x\,dx$$
dove $a>0, a\neq1$.

Sol. Integrando due volte per parti si ottiene
$$\int_0^1 x^2\mathrm{a}^x\,dx = x^2\frac{\mathrm{a}^x}{\log\mathrm{a}}-2x\frac{\mathrm{a}^x}{\log^2\mathrm{a}}+2\frac{\mathrm{a}^x}{\log^3\mathrm{a}}\Bigg]_{x=0}^{x=1}=$$
$$=\frac{a}{\log a}-2\frac{a}{\log^2 a}+2\frac{a}{\log^3 a}-\frac{2}{\log^3 a}.$$

5) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri di una funzione continua.

Sol. Vedasi testo.