MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori

TEMA A Padova 5/9/2003

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{10}|x-10| = \lambda, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Sol. Il dominio della funzione è $\mathbf{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{10} & \text{per } x < 10, \\ \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{10} & \text{per } x > 10, \end{cases}$$

in $x = 10$ c'è un punto angoloso e $f(10) = \mathrm{e}^{10}$.
C'è un minimo per $P = (10 + \log 2, 2\mathrm{e}^{10}(1 - \log 2))$. Quindi

$$\begin{cases} \lambda > \mathrm{e}^{10} \quad \text{oppure} \quad \lambda < 2\mathrm{e}^{10}(1-\log 2): & 1\,\text{sol.} \\ \lambda = \mathrm{e}^{10} \quad \text{oppure} \quad \lambda = 2\mathrm{e}^{10}(1-\log 2): & 2\,\text{sol.} \\ 2\mathrm{e}^{10}(1-\log 2) < \lambda < \mathrm{e}^{10} \quad 3\,\text{sol.} \end{cases}$$

2) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{2\log(1+x)} - \frac{1}{\sin x}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x \sqrt{37+\cos t}\,dt}{\mathrm{e}^{x^2}-1}.$$

Sol.

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{2\log(1+x)} - \frac{1}{\sin x}\right] = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x \sqrt{37+\cos t}\,dt}{\mathrm{e}^{x^2}-1} = \sqrt{38}.$$

3) Trovare, se possibile, $a, b \in \mathbf{R}$ tali che risulti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{x+10}{10x+1} - (ax+b)\right] = 0.$$

Sol. $ax + b$ è il polinomio di Mac Laurin della funzione $f(x) = \frac{x+10}{10x+1}$.
Pertanto $a = f(0) = -99, \quad b = f'(0) = 10$.

4) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!(n+2)!}{n^{\alpha n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{n^{\alpha}}.$$

Sol. La prima serie si studia col criterio del rapporto e si trova convergenza se e solo se $\alpha \geq 2$; la seconda si studia col criterio asintotico e si trova convergenza se e solo se $\alpha > 0$.

5) Calcolare l'area $A(x_0)$ del triangolo determinato dagli assi coordinati e dalla tangente alla curva $y = \frac{1}{x}$ per il punto $\left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$, $x_0 > 0$.

Sol. $A(x_0) = 2$, $\forall x_0$.