MATEMATICA 1
Ingegneria Ambiente e territorio, Civile, Edile
Prof. P. Ciatti, E. Gonzalez, C. Sartori

TEMA A

Padova 21/09/2005

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione 1)
Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{\log(1-x)}{\sqrt[5]{1-x}} = \lambda.$$

Sol.

$$0 < \lambda \leq 5/e \quad 2 \text{ sol} \\ \lambda \leq 0, \quad \lambda = 5/e \quad 1 \text{ sol.}$$

2) Determinare un polinomio $P(x)$ di grado al più due tale che

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^2 - P(x)}{(x - \frac{\pi}{2})^2} = 0.$$

Sol. a) Per la formula di Taylor si ha, detta $f(x) = (\sin x)^2$

$$P(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$f''(x) = 2(\cos x)^2 - 2(\sin x)^2 \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -2.$$

Da cui

$$P(x) = 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

3) a) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \right),$$

dove $a > b > 0$ sono numeri fissati.

Sol. a) Si ha

$$b) \quad \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = e^{\frac{1}{n} \log a} - e^{\frac{1}{n} \log b} = (\log a - \log b) \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha > 1 \\ \log a - \log b & \text{per } \alpha = 1 \\ 0 & \text{per } \alpha < 1. \end{cases}$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{(\sqrt[3]{2n} - \sqrt[3]{2n-1})} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > -2/3 \\ 3\sqrt[3]{4} & \text{se } \alpha = -2/3 \\ 0 & \text{se } \alpha < -2/3. \end{cases}$$

Sol 4) Posto $f(x) = \operatorname{arctg}x$, $g(x) = \sin x$, dire quale delle seguenti possibilità è vera, giustificando la risposta:

a) (*) $\exists \delta > 0 : \operatorname{arctg}x \leq \sin x, \quad \forall x \in [0, \delta];$

b) $\exists \delta > 0 : \operatorname{arctg}x \geq \sin x, \quad \forall x \in [0, \delta];$

c) nessuna delle possibilità precedenti.

5) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \sqrt{37 + \cos t}}{e^{x^2} - 1} = \sqrt{38}.$$

6) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua e derivabile due volte in (a, b) . Sia $x_0 \in (a, b)$. Dimostrare che

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ e' un punto di } \dots$$

MATEMATICA 1

Ingegneria Ambiente e territorio, Civile, Edile

Prof. P. Ciatti, E. Gonzalez, C. Sartori

TEMA B

Padova 21/09/2005

1) Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\lambda = \frac{\log(x-2)}{\sqrt{x-2}}.$$

Sol.

$$\begin{aligned} 0 < \lambda \leq 7/e & \quad 2 \text{ sol} \\ \lambda \leq 0, \quad \lambda = 7/e & \quad 1 \text{ sol.} \end{aligned}$$

2) a) Determinare un polinomio $P(x)$ di grado al più due tale che

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\cos x)^2 - P(x)}{(x - \pi)^2} = 0.$$

Sol. a) Per la formula di Taylor si ha, detta $f(x) = (\cos x)^2$

$$P(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi) + \frac{1}{2}f''(\pi)(x - \pi)^2.$$

$$f'(x) = -2 \cos x \sin x \Big|_{x=\pi} = 0,$$

$$f''(x) = -2(\cos x)^2 + 2(\sin x)^2 \Big|_{x=\pi} = -2.$$

Da cui

$$P(x) = 1 - (x - \pi)^2.$$

3) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha (\sqrt[3]{3n} - \sqrt[3]{3n-1})$$

dove $a > b > 0$ sono due numeri fissati.

Sol Usando gli stessi sviluppi asintotici del Tema A si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha > -1 \\ \frac{1}{\log a - \log b} & \text{per } \alpha = -1 \\ 0 & \text{per } \alpha < -1. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha (\sqrt[3]{3n} - \sqrt[3]{3n-1}) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 2/3 \\ \sqrt[3]{3}/9 & \text{se } \alpha = 2/3 \\ 0 & \text{se } \alpha < 2/3 \end{cases}$$

4) Posto $f(x) = x \cos x$, $g(x) = \sin x$, dire quale delle seguenti possibilità è vera, giustificando la risposta:

- a) (*) $\exists \delta > 0 : x \cos x \leq \sin x, \quad \forall x \in [0, \delta];$
- b) $\exists \delta > 0 : x \cos x \geq \sin x, \quad \forall x \in [0, \delta];$
- c) nessuna delle possibilità precedenti.

5) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \sqrt{37 + \cos t}}{e^{x^2} - 1} = \sqrt{38}.$$

Sol. Vedasi tema A.

6) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua e derivabile due volte in (a, b) . Sia $x_0 \in (a, b)$. Dimostrare che

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ e' un punto di } \dots$$