MATEMATICA 1
Ingegneria Civile e Ingegneria Edile
Prof E. Gonzalez, Prof. C. Sartori
SOLUZIONI

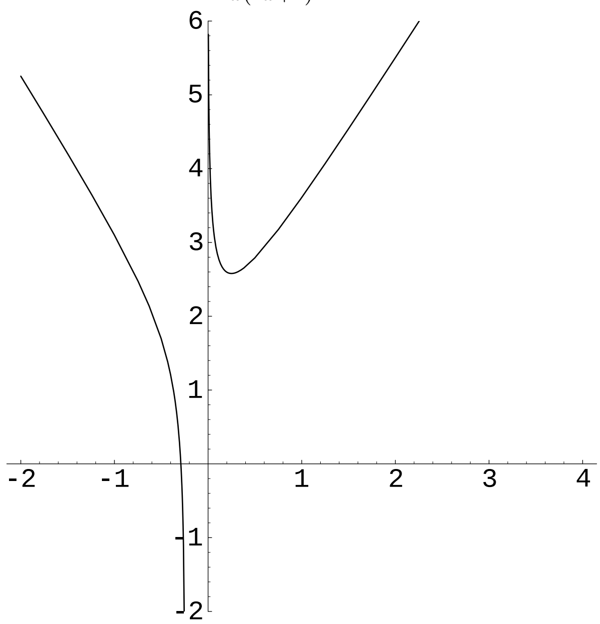
TEMA 1 Padova 11/1/2005

1) Data la funzione

$$f(x) = 2|x| + \log\left(\frac{4x+1}{x}\right)$$

a) se ne tracci il grafico qualitativo e se ne determinino eventuali asintoti;
b) si determini il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol. $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} : x < -\frac{1}{4},\ x > 0\}$. Asintoti $y = 2|x| + \log 4$. $f'(x) = 2\mathrm{sgn}(x) - \frac{1}{x(4x+1)}$. Min in $x = \frac{1}{4}$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \log 8$.



$$\begin{cases} \lambda > \frac{1}{2} + \log 8, & 3\,\text{sol.} \\ \lambda = \frac{1}{2} + \log 8, & 2\,\text{sol.} \\ \lambda < \frac{1}{2} + \log 8, & 1\,\text{sol.} \end{cases}$$

2)$a)$ $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{arctg}(x^\alpha) + x^3 \log x}{\log(1+x^2)} = \begin{cases} 0 & \text{se}\,\alpha > 2, \\ 1 & \text{se}\,\alpha = 2, \\ +\infty & \text{se}\,0 < \alpha < 2. \end{cases}$$

$b)$ $$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha(\sqrt{n^3+1}-n) = \begin{cases} +\infty & \text{se}\,\alpha > -\frac{3}{2}, \\ 1 & \text{se}\,\alpha = -\frac{3}{2}, \\ 0 & \text{se}\,\alpha < -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

3) Data $f(x) = \mathrm{e}^{10x}\sin(2x)$, trovare un polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tale che
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^3} = 0.$$
Sol. $P(x) = \frac{296}{3}x^3 + 20x^2 + 2x$.

4) Posto $f(x) = \mathrm{arctg}x$, $g(x) = \sin x$, dire quale delle seguenti possibilità è vera, giustificando la risposta:
a)(*) $\exists\,\delta > 0$: $\mathrm{arctg}x \leq \sin x$, $\forall x \in [0, \delta]$;
b) $\exists\,\delta > 0$: $\mathrm{arctg}x \geq \sin x$, $\forall x \in [0, \delta]$;
c) nessuna delle possibilità precedenti.

5) Dimostrare che se $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 10$ allora $f(x) > 10$ $\forall x \in \mathbf{R}$.
Sol. Se esistesse $c \in \mathbf{R}$ tale che $f(c) \leq 10$ dalla definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 10$ si trova una contraddizione al fatto che f è strettamene decrescente.

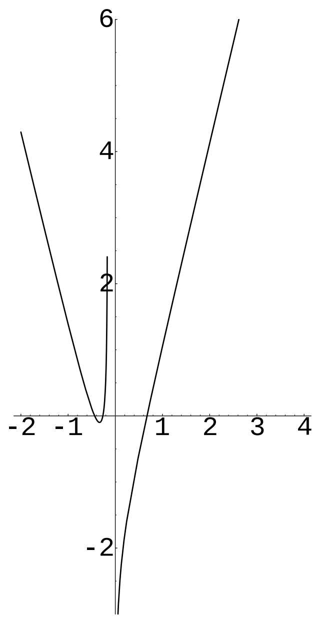
TEMA 2 Padova 11/1/2005

1) Data la funzione

$$f(x) = 3|x| - \log\left(\frac{6x+1}{x}\right)$$

a) se ne tracci il grafico qualitativo e se ne determinino eventuali asintoti;
b) si determini il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol. $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} : x < -\frac{1}{6},\ x > 0\}$. Asintoti $y = 3|x| - \log 6$. $f'(x) = 3\mathrm{sgn}(x) + \frac{1}{x(6x+1)}$. Min in $x = -\frac{1}{3}$. $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \log 3$.



$$\begin{cases} \lambda > 1 - \log 3, & 3\,\text{sol.} \\ \lambda = 1 - \log 3, & 2\,\text{sol.} \\ \lambda < 1 - \log 3, & 1\,\text{sol.} \end{cases}$$

2)

a) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x \log x + \log(1+x^2)}{x^\alpha} = \begin{cases} -\infty & \text{se}\, \alpha \geq 1, \\ 0 & \text{se}\, \alpha < 1. \end{cases}$$

b) $$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^\alpha + n} - n) = \begin{cases} +\infty & \text{se}\, \alpha > 2, \\ \frac{1}{2} & \text{se}\, \alpha = 2, \\ -\infty & \text{se}\, \alpha < 2. \end{cases}$$

3) Data $f(x) = \sin(5x)\cos(3x)$, trovare un polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^3} = 0.$$

Sol. $P(x) = -60x^3 + 5x$.

4) Posto $f(x) = \log(1+x)$, $g(x) = \sin x$, dire quale delle seguenti possibilità è vera, giustificando la risposta:
a) (*) $\quad \exists\, \delta > 0 : \quad \log(1+x) \leq \sin x, \quad \forall x \in [0, \delta]$;
b) $\quad \exists\, \delta > 0 : \quad \log(1+x) \geq \sin x, \quad \forall x \in [0, \delta]$;
c) nessuna delle possibilità precedenti.

5) Dimostrare che se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è derivabile e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, allora esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che $f'(c) = 0$.

Sol. Vedasi testo.

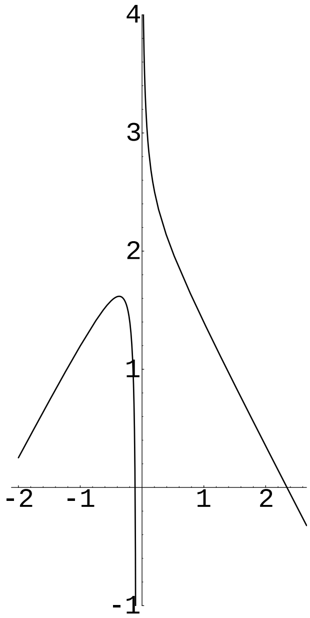
TEMA 3 Padova 11/1/2005

1) Data la funzione

$$f(x) = -|x| + \log\left(\frac{20x+1}{x}\right)$$

a) se ne tracci il grafico qualitativo e se ne determinino eventuali asintoti;
b) si determini il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol. Dom$f$ $= \{x \in \mathbf{R} : x < -\frac{1}{20},\ x > 0\}$. Asintoti $y = -|x| + \log 20$. $f'(x) = -\mathrm{sgn}(x) - \frac{1}{x(20x+1)}$. Max in $x = -\frac{1}{4}$. $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} + \log 16$.



$$\begin{cases} \lambda > -\frac{1}{4} + \log 16 & 1\,\text{sol.} \\ \lambda = -\frac{1}{4} + \log 16, & 2\,\text{sol.} \\ \lambda < -\frac{1}{4} + \log 16, & 3\,\text{sol.} \end{cases}$$

2)$a)$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\cos x)\log x + x^\alpha}{\log(1+x)} = \begin{cases} 0, & \text{se}\,\alpha > 1, \\ 1, & \text{se}\,\alpha = 1 \\ +\infty & \text{se}\,\alpha < 1. \end{cases}$$

$b)$
$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha(\sqrt{n^3+n} - n) = \begin{cases} +\infty & \text{se}\,\alpha > -\frac{3}{2}, \\ 1 & \text{se}\,\alpha = -\frac{3}{2}, \\ 0 & \text{se}\,\alpha < -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

3) Data $f(x) = \frac{\sin(3x)}{1+x^2}$, trovare un polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^3} = 0.$$

Sol. $P(x) = -\frac{15}{2}x^3 + 3x$.

4) Posto $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$, dire quale delle seguenti possibilità è vera, giustificando la risposta:
a)(*) $\exists\, \delta > 0 : \quad 1 - \cos x \leq \mathrm{e}^x - 1 - x, \quad \forall x \in [0, \delta]$;
b) $\exists\, \delta > 0 : \quad 1 - \cos x \geq \mathrm{e}^x - 1 - x, \quad \forall x \in [0, \delta]$;
c) nessuna delle possibilità precedenti.

5)Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Dimostrare che se $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 10$ allora $f(x) > 10$ $\forall x \in \mathbf{R}$.

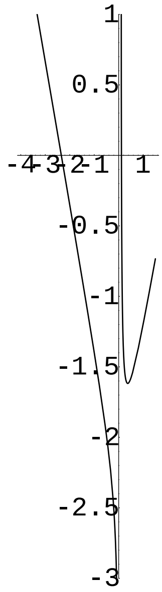
TEMA 4 Padova 11/1/2005

1) Data la funzione

$$f(x) = |x| - \log\left(\frac{30x-1}{x}\right)$$

a) se ne tracci il grafico qualitativo e se ne determinino eventuali asintoti;
b) si determini il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol. Dom$f$ $= \{x \in \mathbf{R} : x < 0,\ x > \frac{1}{30}\}$. Asintoti $y = |x| - \log 30$. $f'(x) = \mathrm{sgn}(x) - \frac{1}{x(30x-1)}$. Min in $x = \frac{1}{5}$. $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \log 25$.



$$\begin{cases} \lambda > \frac{1}{5} - \log 25, & 3\,\text{sol.} \\ \lambda = \frac{1}{5} - \log 25, & 2\,\text{sol.} \\ \lambda < \frac{1}{5} - \log 25, & 1\,\text{sol.} \end{cases}$$

2)

a) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha) + x\log x}{\mathrm{arctg}(x^2)} = \begin{cases} -\infty & \text{se}\ \alpha \geq 1, \\ +\infty & \text{se}\ \alpha < 1. \end{cases}$$

b) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha}(\sqrt{n^4+n} - n) = \begin{cases} +\infty & \text{se}\ \alpha < 2, \\ 1 & \text{se}\ \alpha = 2, \\ 0 & \text{se}\ \alpha > 2. \end{cases}$$

3) Data $f(x) = \mathrm{e}^{5x}\log(1+3x)$, trovare un polinomio $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ tale che
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P(x)}{x^3} = 0.$$

Sol. $P(x) = 24x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 3x$.

4) Posto $f(x) = x\cos x$, $g(x) = \sin x$, dire quale delle seguenti possibilità è vera, giustificando la risposta:
a)(*) $\exists\,\delta > 0\,:\quad x\cos x \le \sin x, \quad \forall x \in [0,\delta]$;
b) $\exists\,\delta > 0\,:\quad x\cos x \ge \sin x, \quad \forall x \in [0,\delta]$;
c) nessuna delle possibilità precedenti.

5) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile, dimostrare che se l'equazione $f(x) = 17x-5$ ha almeno due soluzioni, allora l'equazione $f'(x) = 17$ ha almeno una soluzione.