

MATEMATICA 1
Ingegneria Civile e Ingegneria Edile
Prof E. Gonzalez, Prof. C. Sartori
SOLUZIONI

TEMA 1

Padova 10/12/2004

1) Data la funzione

$$f(x) = \log x + e^3 |x - e^{100}|$$

se ne tracci il grafico qualitativo e si determini il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol.

$$\begin{aligned} \lambda < 100, \quad \lambda > e^{103} - 4, & \quad 1 \text{ soluzione,} \\ \lambda = 100, \quad \lambda = e^{103} - 4, & \quad 2 \text{ soluzioni,} \\ 100 < \lambda < e^{103} - 4, & \quad 3 \text{ soluzioni.} \end{aligned}$$

2)

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10^x + \frac{1}{10^x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = 1, \qquad b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-x^2}^{x^2} e^{\sin t} dt}{e^{x^2} - 1} = 2.$$

3)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left(2 \cos \frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n^4} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 8, \\ \frac{1}{12} & \text{se } \alpha = 8, \\ 0 & \text{se } \alpha < 8. \end{cases}$$

4)

$$\begin{aligned} a) \quad \int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right), \\ b) \quad \int \frac{dx}{(x-5)^2(x+10)} &= \frac{1}{225} \left[\log \left| \frac{x+10}{x-5} \right| - \frac{15}{x-5} \right]. \end{aligned}$$

5) Dimostrare che

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b, \quad \forall a > 0, \quad b > 0.$$

MATEMATICA 1
Ingegneria Civile e Ingegneria Edile
Prof E. Gonzalez, Prof. C. Sartori

TEMA 2

Padova 10/12/2004

1) Data la funzione

$$f(x) = \log x + e^5 |x - e^{10}|$$

se ne tracci il grafico qualitativo e si determini il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol.

$$\begin{aligned} \lambda < 10, \quad \lambda > e^{15} - 6, & \quad 1 \text{ soluzione,} \\ \lambda = 10, \quad \lambda = e^{15} - 6, & \quad 2 \text{ soluzioni,} \\ 10 < \lambda < e^{15} - 6, & \quad 3 \text{ soluzioni.} \end{aligned}$$

2)

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{10x} - 1 - x \log 2^{10}}{x^2} = 50(\log 2)^2,$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-3x^2}^{7x^2} e^{\sin t} dt}{e^{x^2} - 1} = 10.$$

3)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left(e^{\frac{10}{n^2}} - 1 - \frac{10}{n^2} \right) = \begin{cases} 50 & \text{se } \alpha = 4, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 4, \\ 0 & \text{se } \alpha < 4. \end{cases}$$

4)

$$a) \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \right)$$

$$b) \quad \int \frac{dx}{(x+3)^2(x-9)} = \frac{1}{12^2} \left[\log \left| \frac{x-9}{x+3} \right| + \frac{12}{x+3} \right].$$

5) Data $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ e $x_0 \in (a, b)$, dimostrare che se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$ allora f ha un flesso in x_0 .

MATEMATICA 1
Ingegneria Civile e Ingegneria Edile
Prof E. Gonzalez, Prof. C. Sartori

TEMA 3

Padova 10/12/2004

1) Data la funzione

$$f(x) = \log x + e^4 |x - e^{13}|$$

se ne tracci il grafico qualitativo e si determini il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol.

$$\begin{aligned} \lambda < 13, \quad \lambda > e^{17} - 5, & \quad 1 \text{ soluzione,} \\ \lambda = 13, \quad \lambda = e^{17} - 5, & \quad 2 \text{ soluzioni,} \\ 13 < \lambda < e^{17} - 5, & \quad 3 \text{ soluzioni.} \end{aligned}$$

2)

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4^x + 9^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = 6, \qquad b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^{10}} dt}{13x^2 - 1} = \frac{1}{\log 13}.$$

3)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left(\sin \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6n^6} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 10, \\ \frac{1}{5!} & \text{se } \alpha = 10, \\ 0 & \text{se } \alpha < 10. \end{cases}$$

4) Calcolare

$$a) \quad \int (\log x)^3 dx = x \log^3 x - 3x \log^2 x + 6x \log x - 6x,$$

$$b) \quad \int \frac{dx}{(x+10)^2(x-10)} = \frac{1}{20^2} \left[\log \left| \frac{x-10}{x+10} \right| + \frac{20}{x+10} \right].$$

5) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.

MATEMATICA 1
Ingegneria Civile e Ingegneria Edile
Prof E. Gonzalez, Prof. C. Sartori

TEMA 4

Padova 10/12/2004

1) Data la funzione

$$f(x) = \log x - e^6 |x - e^{17}|$$

se ne tracci il grafico qualitativo e si determini il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol.

$$\begin{aligned} \lambda &> 17, & \text{nessuna soluzione,} \\ \lambda &= 17, & 1 \text{ soluzione,} \\ \lambda &< 17, & 2 \text{ soluzioni.} \end{aligned}$$

2)

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\log(1+x^2) + \cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \sqrt{e}, \qquad b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^{10}} dt}{10x^2 - 1} = \frac{1}{\log 10}.$$

3)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left(e^{-\frac{2}{n^2}} - 1 + \frac{2}{n^2} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 4, \\ 2 & \text{se } \alpha = 4, \\ 0 & \text{se } \alpha < 4. \end{cases}$$

4) Calcolare

$$a) \quad \int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{8} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right),$$

$$b) \quad \int \frac{dx}{(x+2)^2(x-8)} = \frac{1}{10^2} \left[\log \left| \frac{x-8}{x+2} \right| + \frac{10}{x+2} \right].$$

5) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.