MATEMATICA 1
Ingegneria Civile e Ingegneria Edile
Prof E. Gonzalez, Prof. C. Sartori
SOLUZIONI

TEMA 1 Padova 9/11/2004

1) a) Determinare $\max(a \cdot b \cdot c \cdot d)$, con $a, b, c, d > 0$ e
i) $a + b + c + d = 40$,
ii) $a + b = 10, \quad c + d = 30$;
b) determinare il coefficente di $a^5 b^5$ nello sviluppo di $(a + b)^{10}$.

Sol. a) i) 10^4, ii) $5^2 15^2$;
b) 252.

2) Calcolare sup e inf dei seguenti insiemi

$$A = \{\frac{5-n}{n^3}, \quad n \in \mathbf{N}\}, \quad B = \{\frac{5-n}{n^3}, \quad n \in \mathbf{N},\, n \geq 10\}.$$

Sol. $\max A = a_1 = 4, \quad \min A = a_8 = -\frac{3}{8^3}$;
$\min B = a_{10} = -\frac{5}{10^3}, \quad \sup B = 0$.

3) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{5n}, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^{5n}, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{5n^2}.$$

Sol. a) $e^{\frac{5}{3}}, \quad b) 1, \quad c) +\infty$.

4) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1000n-200}{1000n+100}\right)^{3n+7}.$$

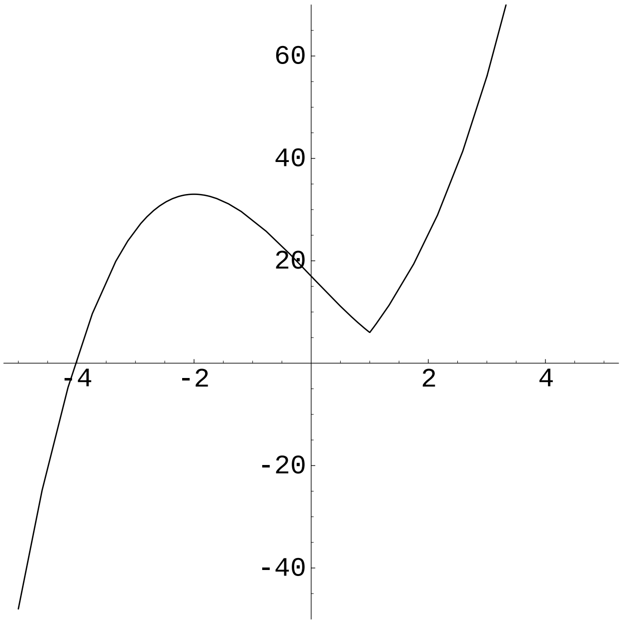
Sol. $e^{-\frac{9}{10}}$.

5) Posto

$$f(x) = x^3 + 12|x-1| + 5,$$

determinare il numero di soluzioni di $f(x) = \lambda$ in funzione di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol. $\lambda < 6,\ \lambda > 33,$ 1 sol,
$\lambda = 6,\ \lambda = 33,$ 2 sol,
$6 < \lambda < 33,$ 3 sol.



6) Dimostrare che se $x > 0$ allora

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(1+x)^n}{n^2} = +\infty.$$

Sol. Vedasi testo.

TEMA 2 Padova 9/11/2004

1) a) Determinare $\max(a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e)$, con $a, b, c, d, e > 0$ e
i) $a + b + c + d + e = 10$,
ii) $a + b = 2, \quad c + d + e = 8$;
b) determinare il coefficente di $a^3 b^8$ nello sviluppo di $(a + b)^{11}$.

Sol. a) i) 2^5, ii) $\left(\frac{8}{3}\right)^3$;
b) 165.

2) Calcolare sup e inf dei seguenti insiemi

$$A = \{\frac{3n-7}{n^3}, \quad n \in \mathbf{N}\}, \quad B = \{\frac{3n-7}{n^3}, \quad n \in \mathbf{N}, \, n \geq 10\}.$$

Sol. $\min A = a_1 = -4, \quad \max A = a_4 = \frac{5}{64}$;
$\max B = a_{10} = \frac{23}{10^3}, \quad \inf B = 0$.

3) Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{10n}, \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{10n^2}, \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n^3}\right)^{n^2}.$$

Sol. a) $\mathrm{e}^5, \quad b) +\infty, \quad c) \, 1$.

4) Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{13n - 10}{13n - 13}\right)^{n+1000}.$$

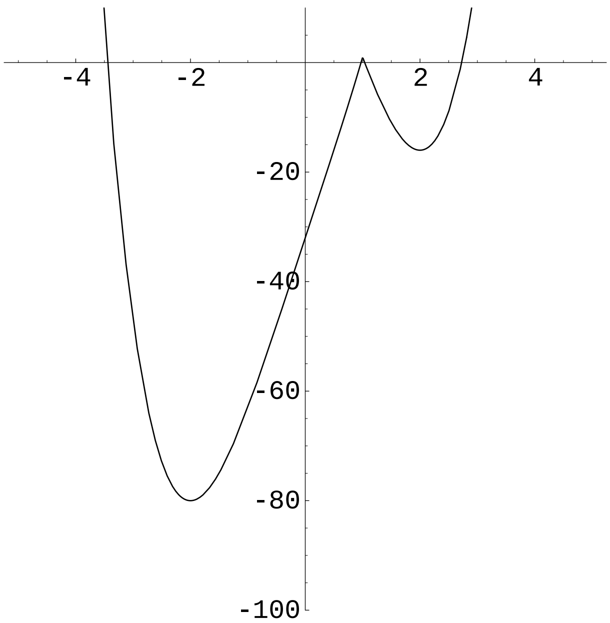
Sol. $\mathrm{e}^{\frac{3}{13}}$.

5) Posto

$$f(x) = x^4 - 32|x - 1|,$$

determinare il numero di soluzioni di $f(x) = \lambda$ in funzione di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol. $\lambda < -80$ no sol.,
$\lambda = -80$, 1 sol.,
$-80 < \lambda < -16, \lambda > 1$, 2 sol.,
$\lambda = -80$, $\lambda = 1$, 3 sol.,
$-16 < \lambda < 1$, 4 sol.,



6) Dimostrare che se f è una funzione derivabile in (a, b), $x_0 \in (a, b)$ è un punto di massimo per f allora $f'(x_0) = 0$.

Sol Vedasi testo

1) a) Determinare $\max(a \cdot b \cdot c \cdot d)$, con $a, b, c, d > 0$ e
i) $a + b + c + d + e = 8$,
ii) $a + b = 6, \quad c + d = 2$;

b) determinare il coefficente di $a^2 b^{11}$ nello sviluppo di $(a + b)^{13}$.

Sol. a) i) 2^4, ii) 3^2;
b) 78.

2) Calcolare sup e inf dei seguenti insiemi

$$A = \{\frac{7-n}{n^3}, \quad n \in \mathbf{N}\}, \quad B = \{\frac{7-n}{n^3}, \quad n \in \mathbf{N},\, n \geq 100\}.$$

Sol. $\max A = a_1 = 6, \quad \min A = a_{11} = -\frac{4}{11^3}$;
$\min B = a_{100} = -\frac{93}{100^3}, \quad \sup B = 0$.

3) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{3n}, \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5n^4}\right)^{3n^3}, \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{3n^2}.$$

Sol. a) $\mathrm{e}^{\frac{3}{5}}, \quad b) 1, \quad c) +\infty$.

4) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8n+5}{8n+4}\right)^{5n-1000}.$$

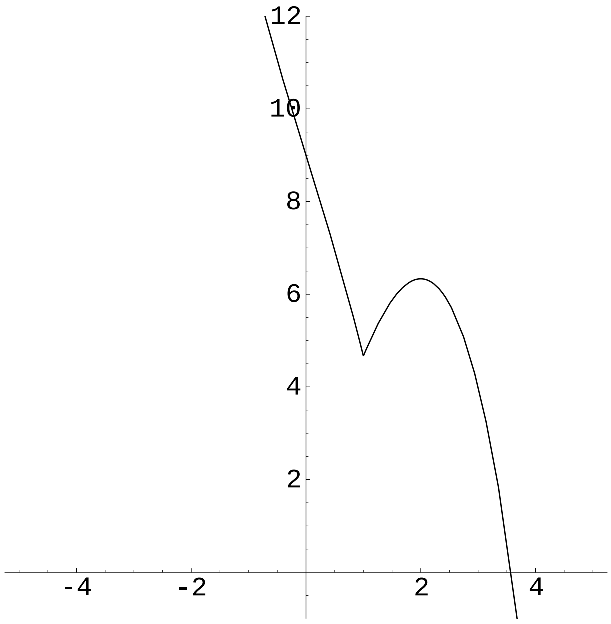
Sol. $\mathrm{e}^{\frac{5}{8}}$.

5) Posto

$$f(x) = 4|x-1| - \frac{x^3}{3} + 5,$$

determinare il numero di soluzioni di $f(x) = \lambda$ in funzione di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol. $\lambda < \frac{14}{3}, \lambda > \frac{19}{3}$, 1 sol,
$\lambda = \frac{14}{3}, \ \lambda = \frac{19}{3}$, 2 sol,
$\frac{14}{3} < \lambda < \frac{19}{3}$, 3 sol.



6) Dimostrare che se f è una funzione derivabile in (a, b) e $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a, b)$ allora $f(x) =$ costante in (a, b).

Sol. Vedasi testo

TEMA 4 Padova 9/11/2004

1) a) Determinare $\max(a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e)$, con $a, b, c, d, e > 0$ e
i) $a + b + c + d + e = 50$,
ii) $a + b = 2, \quad c + d + e = 48$;

b) determinare il coefficente di $a^4 b^8$ nello sviluppo di $(a + b)^{12}$.

Sol a) i) 10^5, ii) $\left(\frac{48}{3}\right)^3 = 16^3$;
b) 495.

2) Calcolare sup e inf dei seguenti insiemi

$$A = \{\frac{3n-5}{n^3}, \quad n \in \mathbf{N},\, n \geq 1\}, \quad B = \{\frac{3n-5}{n^3}, \quad n \in \mathbf{N},\, n \geq 5\}.$$

Sol. $\min A = a_1 = -2, \quad \max A = a_3 = \frac{4}{27}$;
$\max B = a_5 = \frac{2}{5^2}, \quad \inf B = 0$.

3) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{10n}\right)^{2n}, \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{10n^{10}}\right)^{2n}, \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{10n}\right)^{2n^{10}}.$$

Sol. a) $e^{\frac{1}{5}}, \quad b) 1, \quad c) +\infty$. 4) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{6n+10}.$$

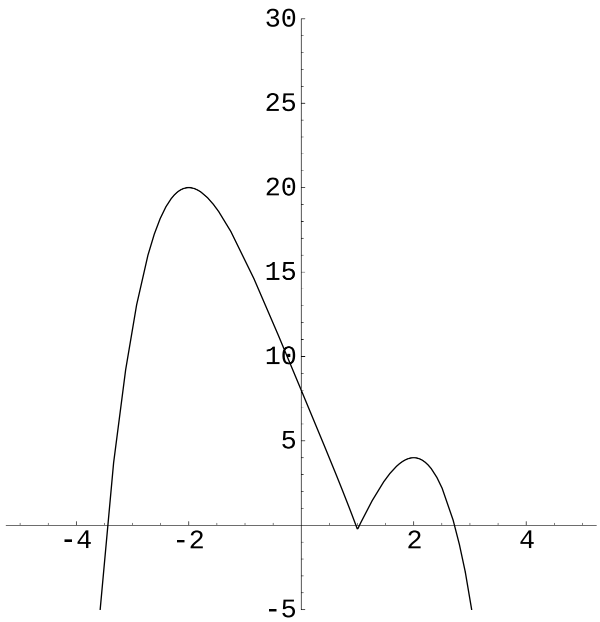
Sol. e^6.

5) Posto

$$f(x) = 8|x-1| - \frac{x^4}{4},$$

determinare il numero di soluzioni di $f(x) = \lambda$ in funzione di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol. $\lambda > 20$ no sol.,
$\lambda = 20,\ 1$ sol.,
$4 < \lambda < 20,\ \lambda < -\frac{1}{4},\ 2$ sol.,
$\lambda = 4,\ \lambda = -\frac{1}{4},\ 3$ sol.
$-\frac{1}{4} < \lambda < 4,\ 4$ sol.



6) Dimostrare che se $a_n > 0$ e

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

allora $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Sol. Vedasi testo.