MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori

TEMA A Padova 25/11/2003

1) Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$-\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4|x-1| = \lambda.$$

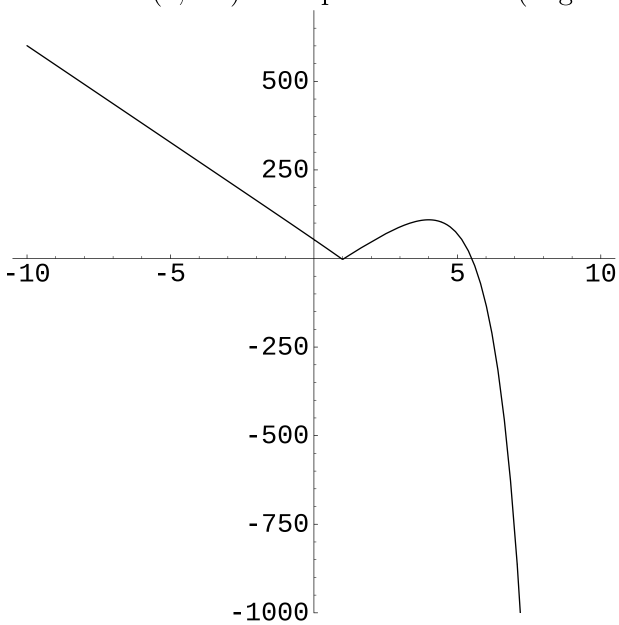
Sol. Studio la funzione

$$f(x) = -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4|x-1|.$$

$\mathrm{Dom} f = \mathbf{R}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4, & \text{per } x > 1 \\ -\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^4, & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

C'è un punto di max in $(4, 2\mathrm{e}^4)$ e un punto di min. (angoloso) in $(1, -\mathrm{e})$.



Quindi

$$\begin{cases} \lambda > 2\mathrm{e}^4,\ \lambda < -\mathrm{e} & 1 \text{ sol.}, \\ -\mathrm{e} < \lambda < 2\mathrm{e}^4 & 3 \text{ sol.}, \\ \lambda = -\mathrm{e}, 2\mathrm{e}^4 & 2 \text{ sol..} \end{cases}$$

2) a) Determinare un polinomio $P(x)$ di grado al più due tale che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^2 - P(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = 0.$$

b) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)$$

dove $a > b > 0$ sono due numeri fissati.

c) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\sqrt[5]{k}}.$$

d) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} - 1.$$

Sol. a) Per la formula di Taylor si ha, detta $f(x) = (\sin x)^2$

$$P(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

$$f'(x) = 2\sin x\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$f''(x) = 2(\cos x)^2 - 2(\sin x)^2\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -2.$$

Da cui

$$P(x) = 1 - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

b) $$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\log a} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\log b} = (\log a - \log b)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha > 1 \\ \log a - \log b & \text{per } \alpha = 1 \\ 0 & \text{per } \alpha < 1. \end{cases}$$

c)
$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\, dx \le \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}} \le \int_1^n \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\, dx$$

da cui
$$\frac{5}{4}\left((n+1)^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{4}{5}}\right) \le \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}} \le \frac{5}{4}\left(n^{\frac{4}{5}} - 1\right)$$

da cui per confronto si ricava subito che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\sqrt[5]{k}} = \frac{5}{4}.$$

d)
$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} - 1 = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

quindi la serie data è asintotica alla serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

che è convergente.

3) Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua e derivabile due volte in (a,b). Sia $x_0 \in (a,b)$. Dimostrare che se
$$f'(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \ \text{e}' \ \text{un punto di} \ \ldots.$$

Sol. Vedasi testo.

TEMA B Padova 25/11/2003

1) Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x - e^2|x-1| = \lambda.$$

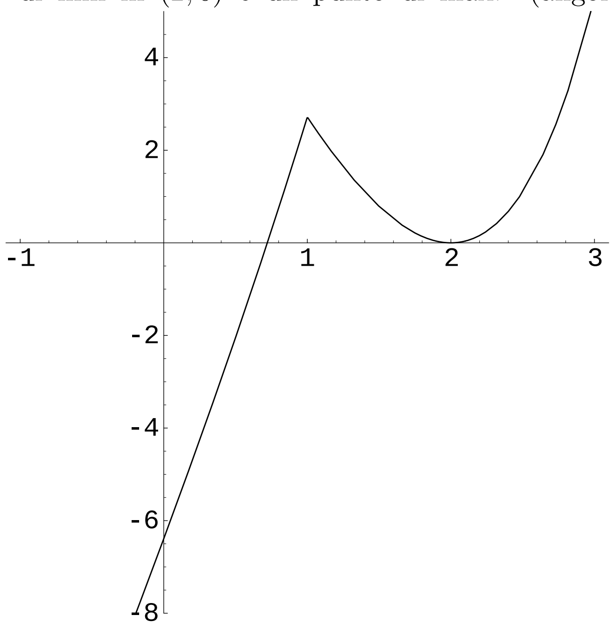
Sol. Studio la funzione

$$f(x) = e^x - e^2|x-1|.$$

$\mathrm{Dom} f = \mathbf{R}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$$f'(x) = \begin{cases} e^x - e^2, & \text{per } x > 1 \\ e^x + e^2, & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

C'è un punto di min in $(2,0)$ e un punto di max. (angoloso) in $(1, e)$.



Quindi

$$\begin{cases} \lambda > e,\ \lambda < 0 & 1 \text{ sol.}, \\ 0 < \lambda < e & 3 \text{ sol.}, \\ \lambda = 0, e & 2 \text{ sol.}. \end{cases}$$

2) a) Determinare un polinomio $P(x)$ di grado al più due tale che

$$\lim_{x\to\pi} \frac{(\cos x)^2 - P(x)}{(x-\pi)^2} = 0.$$

b) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)}$$

dove $a > b > 0$ sono due numeri fissati.

c) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

d) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}.$$

Sol. a) Per la formula di Taylor si ha, detta $f(x) = (\cos x)^2$

$$P(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{1}{2} f''(\pi)(x-\pi)^2.$$

$$f'(x) = -2\cos x \sin x\Big|_{x=\pi} = 0,$$

$$f''(x) = -2(\cos x)^2 + 2(\sin x)^2\Big|_{x=\pi} = -2.$$

Da cui

$$P(x) = 1 - (x-\pi)^2.$$

b) Usando gli stessi sviluppi asintotici dell'esercizio 2b) del Tema A si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha > -1 \\ \frac{1}{\log a - \log b} & \text{per } \alpha = -1 \\ 0 & \text{per } \alpha < -1. \end{cases}$$

c) $$\int_2^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx \le \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \le \int_1^n \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

da cui

$$2\left((n+1)^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}\right)\leq\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\leq 2\left(n^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

da cui per confronto si ricava subito che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{k}}=2.$$

d) $$\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}=-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

quindi la serie data è asintotica alla serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{1}{6n^3}$$

che è convergente.

3) Sia $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ una funzione continua e derivabile due volte in (a,b). Sia $x_0\in(a,b)$. Dimostrare che se

$$f'(x_0)=0 \quad \text{e} \quad f''(x_0)<0 \quad\Rightarrow\quad x_0 \text{ e}' \text{ un punto di } \ldots.$$

Sol. Vedasi testo.

TEMA C Padova 25/11/2003

1) Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{4}|3 + x| = \lambda.$$

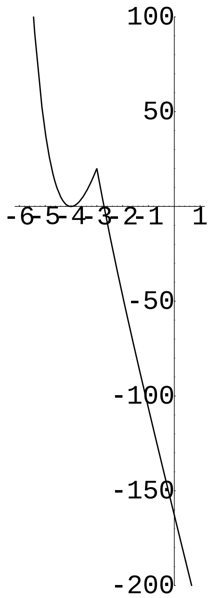
Sol. Studio la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{4}|x + 3|.$$

$\mathrm{Dom} f = \mathbf{R}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{4}, & \text{per } x > -3 \\ -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{4}, & \text{per } x < -3. \end{cases}$$

C'è un punto di max (angoloso) in $(-3, \mathrm{e}^3)$ e un punto di min. in $(-4, 0)$.



Quindi

$$\begin{cases} \lambda > \mathrm{e}^3,\ \lambda < 0, \quad 1 \text{ sol.}, \\ 0 < \lambda < \mathrm{e}^3 \quad 3 \text{ sol.}, \\ \lambda = 0, \mathrm{e}^3 \quad 2 \text{ sol.}. \end{cases}$$

2) a) Determinare un polinomio $P(x)$ di grado al più due tale che

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2) - P(x)}{(x-1)^2} = 0.$$

b) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)^{\alpha} n}$$

dove $a > b > 0$ sono due numeri fissati.

c) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}.$$

d) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Sol. a) Per la formula di Taylor si ha, detta $f(x) = \sin(x^2)$

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2.$$

$$f'(x) = 2x\cos(x^2)\big|_{x=1} = 2\cos 1,$$

$$f''(x) = 2\cos(x^2) - (4x)^2 \sin(x^2)\big|_{x=1} = 2\cos 1 - 4\sin 1.$$

Da cui

$$P(x) = \sin 1 + 2\cos 1(x-1) + (\cos 1 - 2\sin 1)(x-1)^2.$$

b) Usando gli stessi sviluppi asintotici dell'esercizio 2b) del Tema A si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)^{\alpha} n} = \begin{cases} +\infty \quad \text{per } \alpha > 1 \\ \frac{1}{\log a - \log b} \quad \text{per } \alpha = 1 \\ 0 \quad \text{per } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

c) $$\int_2^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx \le \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} \le \int_1^{nn} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx$$

da cui

$$\frac{3}{2}\left((n+1)^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}\right) \le \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} \le \frac{3}{2}\left(n^{\frac{2}{3}} - 1\right)$$

da cui per confronto si ricava subito che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = \frac{3}{2}.$$

d) $$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

quindi la serie data è asintotica alla serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$$

e quindi il carattere della serie data è convergente.

3) Dimostrare che per $x \ge 0$ si ha

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

Sol. Vedasi testo.

1) Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\mathrm{e}^{-|x|} - \mathrm{e}^{-2}(x-7) = \lambda.$$

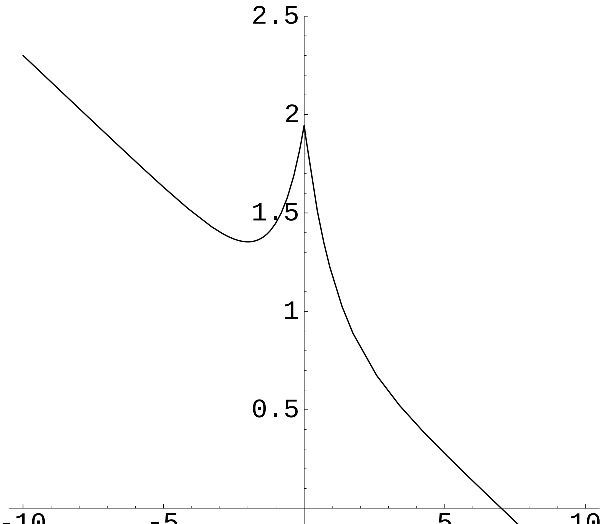
Sol. Studio la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} - \mathrm{e}^{-2}(x-7).$$

$\mathrm{Dom} f = \mathbf{R}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2}, & \text{per } x > 0 \\ \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-2}, & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

C'è un punto di min in $(-2, 10\mathrm{e}^{-2})$ e un punto di max. (angoloso) in $(0, 1 + 7\mathrm{e}^{-2})$.



Quindi

$$\begin{cases} \lambda > 1 + 7\mathrm{e}^{-2},\ \lambda < 10\mathrm{e}^{-2} & 1 \text{ sol.}, \\ 10\mathrm{e}^{-2} < \lambda < 1 + 7\mathrm{e}^{-2}, & 3 \text{ sol.}, \\ \lambda = 10\mathrm{e}^{-2}, 1 + 7\mathrm{e}^{-2}, & 2 \text{ sol.}. \end{cases}$$

2) a) Determinare un polinomio $P(x)$ di grado al più due tale che

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x^2) - P(x)}{(x-1)^2} = 0.$$

b) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)^{\alpha} n$$

dove $a > b > 0$ sono due numeri fissati.

c) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\sqrt[4]{k}}.$$

d) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right).$$

Sol. a) Per la formula di Taylor si ha, detta $f(x) = \cos(x^2)$

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2.$$

$$f'(x) = -2x\sin(x^2)\big|_{x=1} = -2\sin 1,$$

$$f''(x) = -2\sin(x^2) + 4x^2\cos(x^2)\big|_{x=1} = -2\sin 1 + 4\cos 1.$$

Da cui

$$P(x) = \cos 1 - 2\sin 1(x-1) + (2\cos 1 - \sin 1)(x-1)^2.$$

b) Usando gli stessi sviluppi asintotici dell'esercizio 2b) del Tema A si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)^{\alpha} n = \begin{cases} 0 \quad \text{per } \alpha > 1 \\ \log a - \log b \quad \text{per } \alpha = 1 \\ +\infty \quad \text{per } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

c) $$\int_2^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\,dx \le \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^{\frac{1}{4}}} \le \int_1^{n} \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\,dx$$

da cui

$$\frac{4}{3}\left((n+1)^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{3}{4}}\right) \le \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^{\frac{1}{4}}} \le \frac{4}{3}\left(n^{\frac{3}{4}} - 1\right)$$

da cui per confronto si ricava subito che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\sqrt[4]{k}} = \frac{4}{3}.$$

d) $$1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

quindi la serie data è asintotica alla serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$$

e quindi il carattere della serie data è convergente.

3) Dimostrare che per $x \ge 0$ si ha

$$x - \frac{x^3}{3!} \le \sin x \le x.$$

Sol. Vedasi testo.