MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
*Primo compitino. SOLUZIONI*

TEMA A                                    Padova 20/10/2002

1) Sia $f : D \to \mathbf{R}$ data da $f(x) = \sqrt{2-|x|}$ con $D \subset \mathbf{R}$.
a) Determinare il dominio $D$ di $f$ e disegnare il grafico di $f$.
b) Determinare il massimo intervallo contenuto in $D \cap \mathbf{R}^+$ in cui $f$ è invertibile, calcolare l'inversa $f^{-1}$ di $f$ in tale intervallo, specificarne il dominio e tracciarne il grafico.
c) Sia $A = \{x \in D : \ -x < f(x)\}$. Calcolare $\inf A$ e $\sup A$.

**Sol** a) $D = [-2, 2]$.
b) $[0, 2]$ è il massimo intervallo di $\mathbf{R}^+$ in cui $f$ è invertibile. Poichè $f([0, 2]) = [0, \sqrt{2}]$ si ha $\mathrm{Dom} f^{-1} = [0, \sqrt{2}]$ e $f^{-1}(x) = 2 - x^2$.
c) Si confronti il grafico di $y = -x$ con quello di $y = f(x)$. Si trova $A = ]-1, 2[$, $\inf A = -1$ e $\sup A = 2$.

2) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}}{n^{2\alpha}}$$

e, per $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^\alpha + 2}{1 + 2n^\alpha}\right)^{n^3}.$$

**Sol.** Per il primo limite uso $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ con $x = \sqrt[3]{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{3}}$ e $y = \sqrt{n-1} = (n-1)^{\frac{1}{3}}$. Ottengo

$$\frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{n^{2\alpha}} \frac{(n+1)-(n-1)}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}(n-1)^{\frac{1}{3}} + (n-1)^{\frac{2}{3}}}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}}{n^{2\alpha}} = \begin{cases} +\infty \text{ se } 2\alpha + \frac{2}{3} < 0 \iff \alpha < -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \text{ se } 2\alpha + \frac{2}{3} = 0 \iff \alpha = -\frac{1}{3} \\ 0 \text{ se } 2\alpha + \frac{2}{3} > 0 \iff \alpha > -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Per il secondo limite osservo che

$$\left(\frac{2n^\alpha + 2}{1 + 2n^\alpha}\right)^{n^3} = \left(1 + \frac{1}{1+2n^\alpha}\right)^{n^3} = \left(1 + \frac{1}{1+2n^\alpha}\right)^{(1+2n^\alpha)\frac{n^3}{1+2n^\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\begin{cases} +\infty \text{ se } \alpha < 3 \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \text{ se } \alpha = 3 \\ 1 \text{ se } \alpha > 3 \end{cases}$$

3) Sia $(a_n)_n$ una successione decrescente di numeri reali. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n,\ n \in \mathbf{N}\}.$$

**Sol.** Vedasi testo.

TEMA B

1) Sia $f : D \to \mathbf{R}$ data da $f(x) = |\sqrt[3]{x-1}|$ con $D \subseteq \mathbf{R}$.
a) Determinare il dominio $D$ di $f$ e disegnare il grafico di $f$.
b) Determinare il massimo intervallo contenuto in $D \cap \mathbf{R}^+$ in cui $f$ è invertibile, calcolare l'inversa $f^{-1}$ di $f$ in tale intervallo, specificarne il dominio e tracciarne il grafico.
c) Sia $A = \{x \in D : \ x - 1 \leq f(x)\}$. Calcolare $\inf A$ e $\sup A$.

**Sol.** a) $D = \mathbf{R}$.
b) $[1, +\infty[$ è il massimo intervallo di $\mathbf{R}^+$ in cui $f$ è invertibile. Poichè $f([1, +\infty[) = [0, +\infty[$ si ha $\mathrm{Dom} f^{-1} = [0, +\infty[$ e $f^{-1}(x) = 1 + x^3$.
c) Si confronti il grafico di $y = x - 1$ con quello di $y = f(x)$. Si trova $A = ]-\infty, 2[$, $\inf A = -\infty$ e $\sup A = 2$.

2) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{n^\alpha}{\sqrt[3]{n+5} - \sqrt[3]{n-1}} \right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \frac{2n^3 + 11}{2 + 2n^3} \right)^{n^\alpha}.$$

**Sol.** Usando la scomposizione dell'es. 2 del Tema A si ha

$$\frac{n^\alpha}{\sqrt[3]{n+5} - \sqrt[3]{n-1}} = \frac{n^\alpha \left( (n+5)^{\frac{2}{3}} + (n-1)^{\frac{1}{3}}(n+5)^{\frac{1}{3}} + (n-1)^{\frac{2}{3}} \right)}{(n+5) - (n-1)}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{n^\alpha}{\sqrt[3]{n+5} - \sqrt[3]{n-1}} \right) = \begin{cases} +\infty \text{ se } \alpha > -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \text{ se } \alpha = -\frac{2}{3} \\ 0 \text{ se } \alpha < -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Per il secondo limite si ha

$$\left( \frac{2n^3 + 11}{2 + 2n^3} \right)^{n^\alpha} = \left( 1 + \frac{9}{2 + 2n^3} \right)^{\frac{2+2n^3}{9} \frac{9n^\alpha}{2+2n^3}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty \text{ se } \alpha > 3 \\ 1 \text{ se } \alpha < 3 \\ \mathrm{e}^{\frac{9}{2}} \text{ se } \alpha = 3 \end{cases}$$

3) Sia $(a_n)_n$ una successione crescente di numeri reali. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n, \, n \in \mathbf{N}\}.$$

**Sol.** Vedasi testo.

TEMA C

1) Sia $f : D \to \mathbf{R}$ data da $f(x) = \sqrt{|x| - 1}$ con $D \subset \mathbf{R}$.
a) Determinare il dominio $D$ di $f$ e disegnare il grafico di $f$.
b) Determinare il massimo intervallo contenuto in $D \cap \mathbf{R}^+$ in cui $f$ è invertibile, calcolare l'inversa $f^{-1}$ di $f$ in tale intervallo, specificarne il dominio e tracciarne il grafico.
c) Sia $A = \{x \in D : \; x - 2 \leq f(x)\}$. Calcolare $\inf A$ e $\sup A$.

**Sol.** a) $D = \{x \in \mathbf{R} : \; |x| \geq 1\}$.
b) Il massimo intervallo contenuto in $\mathbf{R}^+$ in cui $f$ è invertibile è $[1, +\infty[$. Poichè $f([1, +\infty[) = [0, +\infty[$ si ha $\mathrm{Dom} f^{-1} = [0, +\infty[$ e $f^{-1}(x) = 1 + x^2$.
c) Si confronti il grafico di $y = x - 2$ con quello di $y = f(x)$. Si trova $A = ]-\infty, -1] \cup [1, \frac{5+\sqrt{5}}{2}]$, $\inf A = -\infty$ e $\sup A = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

2) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}(\sqrt[3]{10+n} - \sqrt[3]{5+n}),$$

e, al variare di $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n^{\alpha}+7}{5+3n^{\alpha}}\right)^{n^4}.$$

**Sol.** Usando la scomposizione dell'es. 2 del Tema A si ha

$$n^{\alpha}(\sqrt[3]{10+n} - \sqrt[3]{5+n}) = \frac{n^{\alpha}((10+n)-(5+n))}{(10+n)^{\frac{2}{3}} + (5+n)^{\frac{1}{3}}(10+n)^{\frac{1}{3}} + (5+n)^{\frac{2}{3}}}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}(\sqrt[3]{10+n} - \sqrt[3]{5+n}) = \begin{cases} +\infty \text{ se } \alpha > \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \text{ se } \alpha = \frac{2}{3} \\ 0 \text{ se } \alpha < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Per il secondo limite si ha

$$\left(\frac{3n^{\alpha}+7}{5+3n^{\alpha}}\right)^{n^4} = \left(1 + \frac{2}{5+3n^{\alpha}}\right)^{\frac{5+3n^{\alpha}}{2}\frac{2n^4}{5+3n^{\alpha}}} \underset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} +\infty \text{ se } 0 < \alpha < 4 \\ 1 \text{ se } \alpha > 4 \\ e^{\frac{2}{3}} \text{ se } \alpha = 4 \end{cases}$$

3) Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Sol. Vedasi testo.

TEMA D

1) Sia $f : D \to \mathbf{R}$ data da $f(x) = 2 - |\sqrt[3]{x}|$ con $D \subseteq \mathbf{R}$.
a) Determinare il dominio $D$ di $f$ e disegnare il grafico di $f$.
b) Determinare il massimo intervallo contenuto in $D \cap \mathbf{R}^+$ in cui $f$ è invertibile, calcolare l'inversa $f^{-1}$ di $f$ in tale intervallo, specificarne il dominio e tracciarne il grafico.
c) Sia $A = \{x \in D : \ f(x) > 2 - x\}$. Calcolare $\inf A$ e $\sup A$.

**Sol.** a) $D = \mathbf{R}$.
b) Il massimo intervallo contenuto in $\mathbf{R}^+$ in cui $f$ è invertibile è $[0, +\infty[$. Poichè $f([0, +\infty[) = [-\infty, 2]$ si ha $\mathrm{Dom} f^{-1} = [-\infty, 2]$ e $f^{-1}(x) = (2 - x)^3$.
c) Si confronti il grafico di $y = 2 - x$ con quello di $y = f(x)$. Si trova $A = ]1, +\infty[$ $\inf A = 1$ e $\sup A = +\infty$.

2) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{\sqrt[3]{n+6} - \sqrt[3]{n-3}}{n^\alpha + 1} \right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \frac{10 + 3n^2}{3n^2 + 1} \right)^{n^\alpha}$$

**Sol** Uso la scomposizione dell'esercizio 2del tema A e ottengo

$$\frac{\sqrt[3]{n+6} - \sqrt[3]{n-3}}{n^\alpha + 1} = \frac{1}{n^\alpha + 1} \frac{(n+6) - (n-3)}{(n+6)^{\frac{2}{3}} + (n+6)^{\frac{1}{3}}(n-3)^{\frac{1}{3}} + (n-3)^{\frac{2}{3}}}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{\sqrt[3]{n+6} - \sqrt[3]{n-3}}{n^\alpha + 1} \right) = 0 \ \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

Per il secondo limite osservo che

$$\left( \frac{10 + 3n^2}{3n^2 + 1} \right)^{n^\alpha} = \left( 1 + \frac{9}{3n^2 + 1} \right)^{n^\alpha} = \left( 1 + \frac{9}{3n^2 + 1} \right)^{\frac{3n^2+1}{9} \frac{9n^\alpha}{3n^2+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ se } \alpha < 2 \\ \mathrm{e}^3 \text{ se } \alpha = 2 \\ +\infty \text{ se } \alpha > 2. \end{cases}$$

3) Enunciare e dimostrare il teorema per cui il prodotto di una successione limitata per una successione infinitesima è una successione infinitesima.

**Sol.** Vedasi testo.