MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori
Secondo compitino

TEMA A Padova 3/11/2002

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{2x-5}{x^3(x-2)} = \lambda.$$

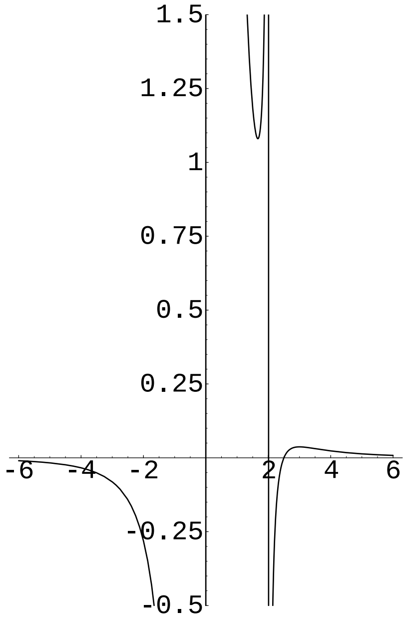
Sol. Studio

$$f(x) = \frac{2x-5}{x^3(x-2)}.$$

$x = 0$ e $x = 2$ sono asintoti verticali $y = 0$ è asintoto orizzontale e

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 28x - 30}{x^4(x-2)^2}.$$

$f'(x) = 0$ se $x = 3, \frac{5}{3}$, $\left(3, \frac{1}{27}\right)$è punto di max, $\left(\frac{5}{3}, \frac{27}{25}\right)$ è punto di min.



Quindi

$$\begin{cases} -\infty < \lambda < 0, \quad 0 < \lambda < \frac{1}{27}, \quad \frac{27}{25} < \lambda < +\infty \quad 2 \text{ sol} \\ \lambda = 0, \frac{1}{27}, \frac{27}{25} \quad 1 \text{ sol} \\ \frac{1}{27} < \lambda < \frac{27}{25} \quad \text{nessuna sol.} \end{cases}$$

2) Calcolare $a, b \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} - (ax + b) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + bx^2}{ax^2 - 1} - (3x + 1) = 0.$$

Sol. $a = -1, b = -\frac{1}{2}$.
$a = \frac{1}{3} = b$.
3) Sia data per $x \in \mathbf{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \sqrt{1 + t^{10}}\, dt.$$

a) Calcolare $F'(x)$ e dire se F è invertibile su tutto $\mathbf{R}$.
b) Determinare la retta tangente a F per $x = -1$.
c) Calcolare $(F^{-1})'(0)$.
Sol. a) $F'(x) = \sqrt{1 + x^{10}} \quad \forall x \in \mathbf{R}$ ed essendo $F'(x) > 0$ F è invertibile in tutto $\mathbf{R}$.
b) Essendo $F(-1) = 0$ e $F'(-1) = \sqrt{2}$ la retta tangente è $y = \sqrt{2}(x + 1)$.
c) $(F^{-1})'(0) = \frac{1}{\sqrt{1+t^{10}}}\Big|_{t=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori
Secondo compitino

TEMA B Padova 3/11/2002

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{10-4x}{x^3(x-2)} = \lambda.$$

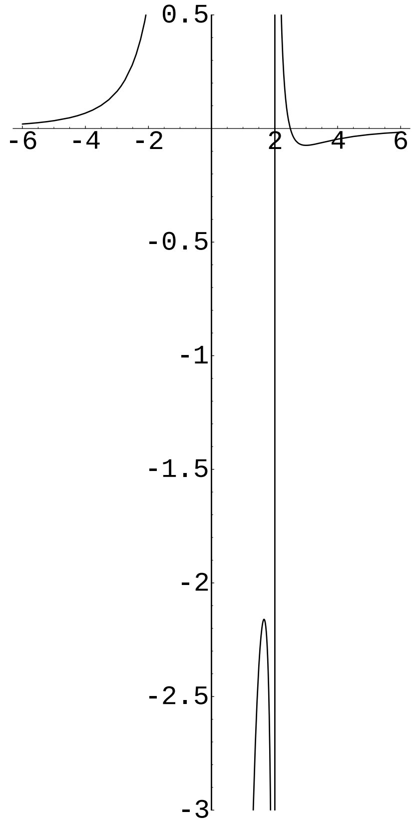
Sol. Studio

$$f(x) = -2\frac{2x-5}{x^3(x-2)}.$$

$x = 0$ e $x = 2$ sono asintoti verticali $y = 0$ è asintoto orizzontale e

$$f'(x) = -2\frac{-6x^2+28x-30}{x^4(x-2)^2}.$$

$f'(x) = 0$ se $x = 3, \frac{5}{3}$, $\left(3, -\frac{2}{27}\right)$è punto di min, $\left(\frac{5}{3}, -\frac{54}{25}\right)$ è punto di min.



Quindi

$$\begin{cases} -\infty < \lambda < -\frac{54}{25}, \quad -\frac{2}{27} < \lambda < 0, \quad 0 < \lambda < +\infty \quad \text{2 sol} \\ \lambda = 0, -\frac{2}{27}, -\frac{54}{25} \quad \text{1 sol} \\ -\frac{54}{25} < \lambda < -\frac{2}{27} \quad \text{nessuna sol.} \end{cases}$$

2) Calcolare $a, b \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - (ax+b) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3+5x^2}{x^2-bx} - (x+2) = 0.$$

Sol. $a = -1$, $b = 0$.
$a = 1$, $b = -3$.
3) Sia data per $x \in \mathbf{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_{-2}^{x} \frac{1}{\sqrt{t^{10}+10}}\, dt.$$

a) Calcolare $F'(x)$ e dire se F è invertibile su tutto $\mathbf{R}$.
b) Determinare la retta tangente a F per $x = -2$.
c) Calcolare $(F^{-1})'(0)$.
Sol. a) $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{10+x^{10}}}$ $\quad \forall x \in \mathbf{R}$ ed essendo $F'(x) > 0$ F è invertibile in tutto $\mathbf{R}$.
b) Essendo $F(-2) = 0$ e $F'(-2) = \frac{1}{\sqrt{10+2^{10}}}$ la retta tangente è $y = \frac{1}{\sqrt{10+2^{10}}}(x+2)$.
c) $(F^{-1})'(0) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{10+t^{10}}}}\Big|_{t=-2} = \sqrt{10+2^{10}}$.

MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori
Secondo compitino

TEMA C Padova 3/11/2002

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{2x+5}{x^3(x+2)} = \lambda.$$

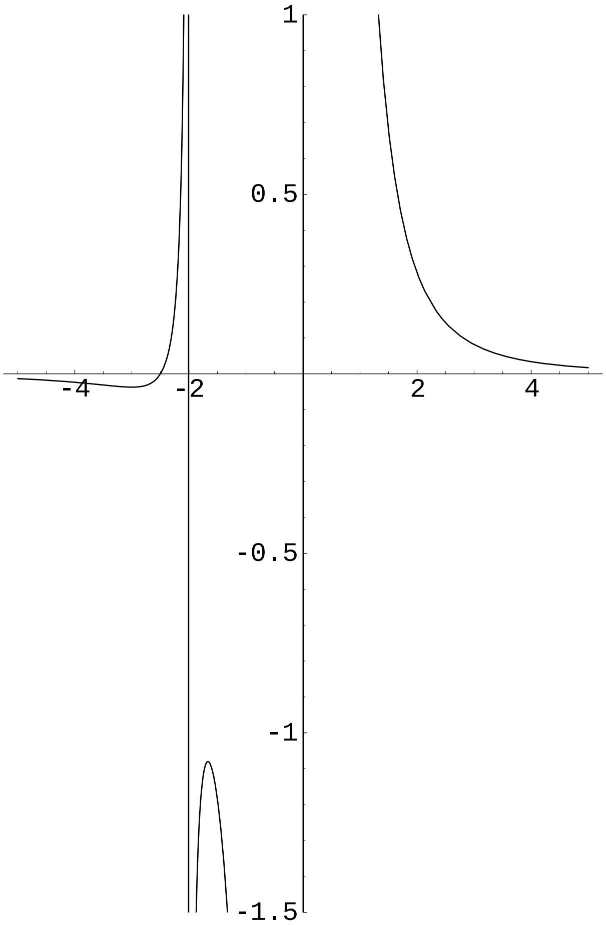
Sol. Studio

$$f(x) = \frac{2x+5}{x^3(x+2)}.$$

$x = 0$ e $x = -2$ sono asintoti verticali $y = 0$ è asintoto orizzontale e

$$f'(x) = -2\frac{3x^2+14x+15}{x^4(x+2)^2}.$$

$f'(x) = 0$ se $x = -3, -\frac{5}{3}$, $\left(-3, -\frac{1}{27}\right)$è punto di min, $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{27}{25}\right)$ è punto di max.



Quindi

$$\begin{cases} -\infty < \lambda < -\frac{27}{25},\ -\frac{1}{27} < \lambda < 0,\ 0 < \lambda < +\infty \ 2 \ \text{sol} \\ \lambda = 0,\ \lambda = -\frac{1}{27},\ \lambda = -\frac{27}{25} \ \ 1 \ \text{sol} \\ -\frac{27}{25} < \lambda < -\frac{1}{27} \ \text{nessuna sol.} \end{cases}$$

2) Calcolare $a, b \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x} - (ax+b) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+bx^2}{ax^2-x} - (2x+1) = 0.$$

Sol. $a = -1$, $b = 1$.
$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}$.
3) Sia data per $x \in \mathbf{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_1^x -\frac{1}{\sqrt{t^{12}+12}}\, dt.$$

a) Calcolare $F'(x)$ e dire se F è invertibile su tutto $\mathbf{R}$.
b) Determinare la retta tangente a F per $x = 1$.
c) Calcolare $(F^{-1})'(0)$.

Sol. a) $F'(x) = -\frac{1}{\sqrt{12+x^{12}}} \quad \forall x \in \mathbf{R}$ ed essendo $F'(x) < 0$ F è invertibile in tutto $\mathbf{R}$.
b) Essendo $F(1) = 0$ e $F'(1) = -\frac{1}{\sqrt{13}}$ la retta tangente è $y = -\frac{1}{\sqrt{13}}(x-1)$.
c) $(F^{-1})'(0) = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{12+x^{12}}}}\Big|_{t=1} = -\sqrt{13}$.

MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori
Secondo compitino

TEMA D Padova 3/11/2002

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1-5x}{x^3(1-x)} = \lambda.$$

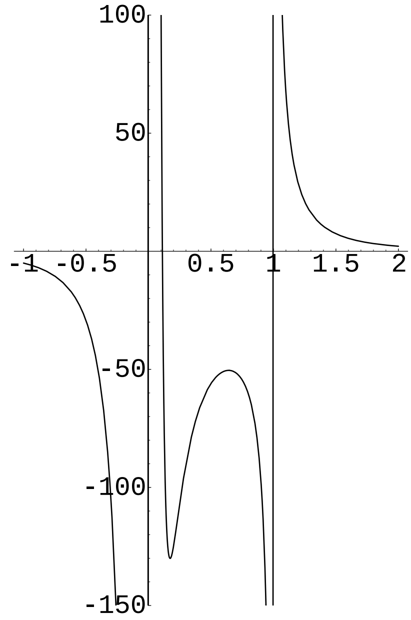
Sol. Studio

$$f(x) = \frac{1-5x}{x^3(1-x)}.$$

$x = 0$ e $x = 1$ sono asintoti verticali $y = 0$ è asintoto orizzontale e

$$f'(x) = \frac{-15x^2 + 14x - 3}{x^4(1-x)^2}.$$

$f'(x) = 0$ se $x = \frac{1}{3}, \frac{3}{5}$, $\left(\frac{1}{3}, -27\right)$è punto di min, $\left(\frac{3}{5}, -\frac{625}{27}\right)$ è punto di max.



Quindi

$$\begin{cases} -\infty < \lambda < -27, \ -\frac{625}{27} < \lambda < 0, \, 0 < \lambda < +\infty, \ 2 \ \text{sol} \\ \\ \lambda = 0, \ 1 \text{ sol.} \\ \\ \lambda = -\frac{625}{27}, \, \lambda = -27, \ 3 \, \text{sol} \\ \\ -27 < \lambda < -\frac{625}{27}, \ \ 4 \, \text{sol.} \end{cases}$$

2) Calcolare $a, b \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 3x} - (ax + b) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax^3 + bx^2}{x^2 - x} - (5x - 1) = 0.$$

Sol. $a = -1$, $b = \frac{3}{2}$.
$a = 5$, $b = -6$.

3) Sia data per $x \in \mathbf{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_2^x \sqrt{t^8 + 8} \, dt.$$

a) Calcolare $F'(x)$ e dire se F è invertibile su tutto $\mathbf{R}$.
b) Determinare la retta tangente a F per $x = 2$.
c) Calcolare $(F^{-1})'(0)$.
Sol. a) $F'(x) = \sqrt{x^8 + 8}$
ed essendo $F'(x) > 0$ F è invertibile in tutto $\mathbf{R}$.
b) Essendo $F(2) = 0$ e $F'(2) = \sqrt{2^8 + 8} = \sqrt{264}$ la retta tangente è $y = \sqrt{264}(x - 2)$.
c) $(F^{-1})'(0) = -\frac{1}{\sqrt{x^8+8}}\Big|_{t=2} = \frac{1}{\sqrt{264}}$.