MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori
Terzo compitino

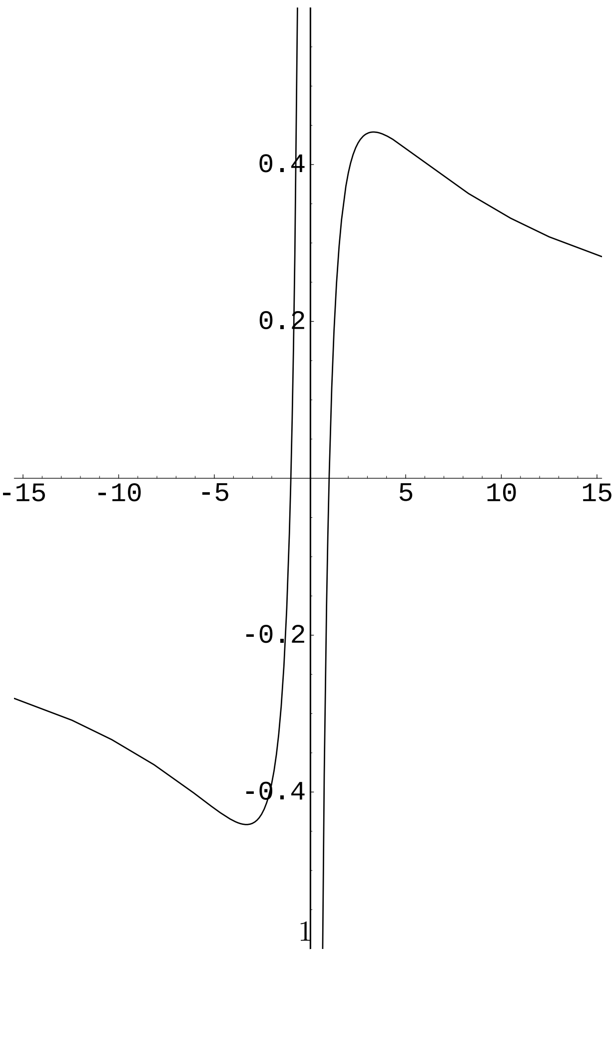
SOLUZIONI

TEMA A Padova 21/11/2003

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\log|x| = \lambda \sqrt[5]{x}.$$

Sol. Studio la funzione $f(x) = \frac{\log|x|}{\sqrt[5]{x}}$. Dom$f = \{x \in \mathbf{R},\ x \neq 0\}$. f è dispari. La studio per $x > 0$. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}}(1 - \frac{1}{5}\log x)$ per $x > 0$. C'è un max in $(\mathrm{e}^5, \frac{5}{\mathrm{e}})$. Per prblemi di scala il grafico riportato di seguito non è quello della funzione da studiare ma di una che ha un grafico qualitativamente analogo.



Quindi

$$\begin{cases} |\lambda| > \frac{5}{e} \quad 1 \text{ sol.} \\ \\ \lambda = \left|\frac{5}{e}\right|, \ \lambda = 0, \ 2 \text{ sol.} \\ \\ -\frac{5}{e} < \lambda < 0 < \lambda < \frac{5}{e}, \ 3 \text{ sol.} \end{cases}$$

2) a) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n} \right)^2 - \frac{1}{n^2} \right).$$

b) Calcolare

$$\int \frac{3x+6}{x^3+8}\, dx.$$

Sol. a) Per $n \to +\infty$ si applica lo sviluppo asintotico di $\operatorname{arctg}(x)$ per $x \to 0$. Si ha

$$\left(\operatorname{arctg}\tfrac{1}{n}\right)^2 - \tfrac{1}{n^2} = \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{3n^3} + o\left(\tfrac{1}{n^3}\right)\right)^2 - \tfrac{1}{n^2} =$$

$$\tfrac{1}{n^2} - \tfrac{2}{3n^4} + o\left(\tfrac{1}{n^4}\right) - \tfrac{1}{n^2} = -\tfrac{2}{3n^4} + o\left(\tfrac{1}{n^4}\right).$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n} \right)^2 - \frac{1}{n^2} \right) = \begin{cases} -\infty \text{ per } \alpha > 4 \\ -\frac{2}{3} \text{ per} \alpha = 4 \\ 0 \text{ per } \alpha < 4. \end{cases}$$

b) $\int \frac{3x+6}{x^3+8}\, dx = \int \frac{3(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}\, dx = 3\int \frac{1}{x^2-2x+4}\, dx$

$$3\int \frac{1}{(x-1)^2+3}\, dx = \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dx \underset{\frac{x-1}{\sqrt{3}}=t}{\underset{\uparrow}{=}} \int \frac{\sqrt{3}}{t^2+1}\, dt = \sqrt{3} \operatorname{arctang}\frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

3) Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua in $[0,1]$ e derivabile in $(0,1)$ tale che $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$. Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange per tale funzione e interpretare geometricamente la tesi del teorema

Sol Il Teorema di Lagrange per una funzione che ha le proprietà elencate dice che esiste un punto $x_0 \in (0,1)$ tale che

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(x_0) \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = -1.$$

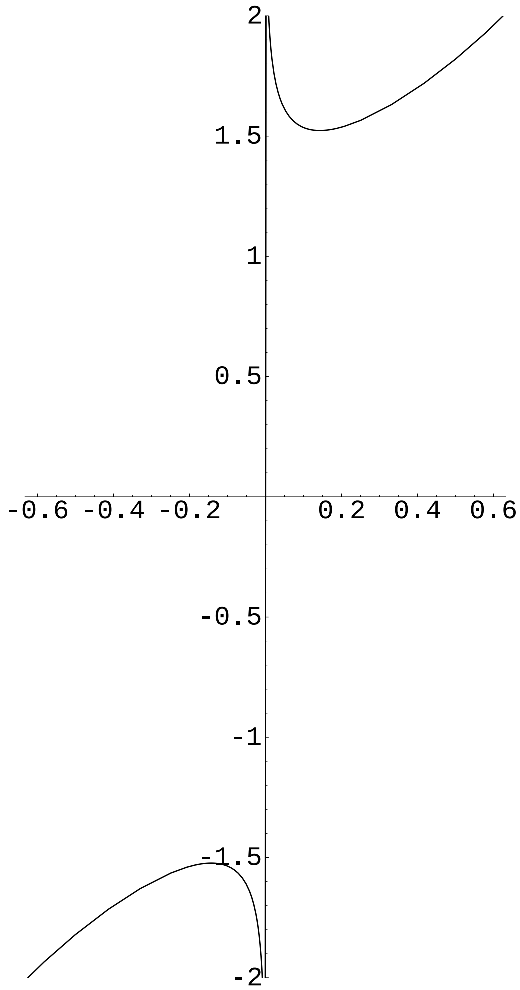
Per la dimostrazione si veda il testo.

TEMA B Padova 21/11/2003

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^{|x|} = \lambda \sqrt[7]{x}.$$

Sol Studio la funzione $f(x) = \frac{e^{|x|}}{\sqrt[7]{x}}$. Dom$f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$. f è dispari. Quindi la studio per $x > 0$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt[7]{x}} \frac{7x-1}{7x}$ per $x > 0$. C'è un punto di minimo in $\left(\frac{1}{7}, \sqrt[7]{7e}\right)$.



Quindi

$$\begin{cases} |\lambda| > \sqrt[7]{7e} & 2 \text{ sol.} \\ |\lambda| = \sqrt[7]{7e} & 1 \text{ sol.} \\ |\lambda| < \sqrt[7]{7e} & \text{no sol.} \end{cases}$$

2) a) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\left(\log(1+\frac{1}{3n}) \right)^2 - \frac{1}{n^2} \right).$$

b) Calcolare

$$\int \frac{4x-16}{x^3-64}\, dx.$$

Sol. Per $n \to +\infty$ si applica lo sviluppo asintotico di $\log(1+x)$ per $x \to 0$. Si ha

$$\left(\log(1+\tfrac{1}{3n})\right)^2 - \tfrac{1}{9n^2} = \left(\tfrac{1}{3n} - \tfrac{1}{18n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \tfrac{1}{9n^2} =$$

$$\tfrac{1}{9n^2} - \tfrac{1}{27n^3} + o\left(\tfrac{1}{n^3}\right) - \tfrac{1}{9n^2} = -\tfrac{1}{27n^3} + o\left(\tfrac{1}{n^3}\right).$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\left(\log(1+\frac{1}{3n}) \right)^2 - \frac{1}{9n^2} \right) = \begin{cases} -\infty \text{ per } \alpha > 3 \\ -\frac{1}{27} \text{ per} \alpha = 3 \\ 0 \text{ per } \alpha < 3. \end{cases}$$

b) $$\int \tfrac{4x-16}{x^3-64}\, dx = \int \tfrac{4(x-4)}{(x-4)(x^2+4x+16)}\, dx = 4\int \tfrac{1}{x^2+4x+4+12}\, dx$$

$$4\int \tfrac{1}{(x+2)^2+12}\, dx = \tfrac{1}{3}\int \tfrac{1}{\left(\frac{x+2}{2\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dx \underset{\frac{x+2}{2\sqrt{3}}=t}{\overset{\uparrow}{=}} \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\int \tfrac{1}{t^2+1}\, dt =$$

$$\tfrac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctang}\left(\tfrac{x+2}{2\sqrt{3}}\right).$$

3) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua e derivabile. Sia x_0 un punto di minimo per $f\big|_{[0,1]}$. Discutere come deve essere il segno di $f'(x_0)$ e dimostrare ciò che si afferma.

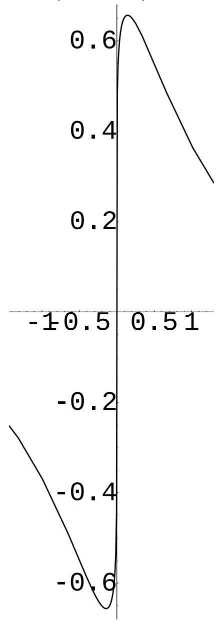
Sol. Si ha $f'(x_0) = 0$ se $x_0 \in (0,1)$, $f'(x_0) \geq 0$ se $x_0 = 0$, e $f'(x_0) \leq 0$ se $x_0 = 1$. Per la dimostrazione si veda il testo.

TEMA C Padova 21/11/2003

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^{-|x|} = \lambda \frac{1}{\sqrt[5]{x}}, \quad x \neq 0.$$

Sol Studio la funzione $f(x) = e^{-|x|} \sqrt[5]{x}$. Noto che $f(x) = \lambda$ è equivalente all'equazione data solo per $x \neq 0$. Dom$f = \mathbf{R}$. f è dispari. Quindi la studio per $x > 0$. $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. $f'(x) = e^{-x} \sqrt[5]{x}\ \frac{5x-1}{5x}$ per $x > 0$. C'è un punto di max. in $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{\sqrt[5]{5e}}\right)$.



Quindi l'equazione data ha le soluzioni

$$\begin{cases} |\lambda| < \frac{1}{\sqrt[5]{5e}},\ \lambda \neq 0 \text{ 2 sol.}, \\ |\lambda| = \frac{1}{\sqrt[5]{5e}} \text{ 2 sol.}, \\ |\lambda| > \frac{1}{\sqrt[5]{5e}},\ \lambda = 0 \text{ no sol.}. \end{cases}$$

2) a) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n^2}}{n^\alpha}.$$

b) Calcolare

$$\int \frac{3x - 6}{x^3 - 8}\, dx.$$

Sol. a) Per $n \to +\infty$ si applica lo sviluppo asintotico di $\sin(x)$ per $x \to 0$. Si ha

$$\left(\sin \tfrac{1}{n}\right)^2 - \tfrac{1}{n^2} = \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{6n^3} + o\left(\tfrac{1}{n^3}\right)\right)^2 - \tfrac{1}{n^2} =$$

$$\tfrac{1}{n^2} - \tfrac{1}{3n^4} + o\left(\tfrac{1}{n^4}\right) - \tfrac{1}{n^2} = -\tfrac{1}{3n^4} + o\left(\tfrac{1}{n^4}\right).$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n^2}}{n^\alpha} = \begin{cases} -\infty \text{ per } \alpha < -4 \\ -\frac{1}{3} \text{ per} \alpha = -4 \\ 0 \text{ per } \alpha > -4. \end{cases}$$

b) $\int \frac{3x-6}{x^3-8}\, dx = \int \frac{3(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\, dx = 3\int \frac{1}{x^2+2x+4}\, dx =$

$$3\int \tfrac{1}{(x+1)^2+3}\, dx = \int \tfrac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dx \underset{\frac{x+1}{\sqrt{3}}=t}{\overset{\uparrow}{=}} \sqrt{3}\int \tfrac{1}{t^2+1} = \sqrt{3}\ \text{arctang}\tfrac{x+1}{\sqrt{3}}.$$

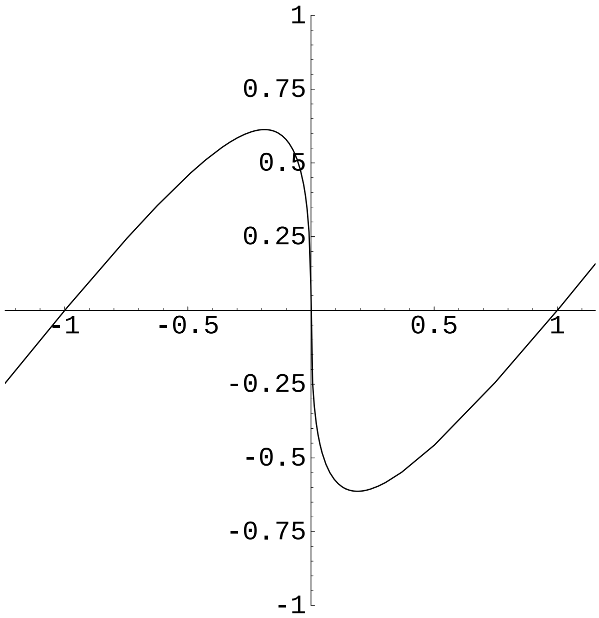
3) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua e derivabile. Sia x_0 un punto di massimo per $f\big|_{[0,1]}$. Discutere come deve essere il segno di $f'(x_0)$ e dimostrare ciò che si afferma.

Sol. Si ha $f'(x_0) = 0$ se $x_0 \in (0,1)$, $f'(x_0) \leq 0$ se $x_0 = 0$, e $f'(x_0) \geq 0$ se $x_0 = 1$. Per la dimostrazione si veda il testo.

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\log|x| = \lambda \frac{1}{\sqrt[7]{x}}.$$

Sol. Studio la funzione $f(x) = \log|x| \sqrt[7]{x}$. Dom$f = \{x \in \mathbf{R},\ x \neq 0\}$. f è dispari. La studio per $x > 0$. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{x^6}}(1 + \frac{1}{7}\log x)$ per $x > 0$. C'è un min in $(\mathrm{e}^{-7}, -\frac{7}{\mathrm{e}})$.
Per problemi di scala il grafico riportato di seguito non è quello della funzione studiata ma di una che ha un grafico qualitativamente analogo.



Quindi

$$\begin{cases} |\lambda| > \frac{7}{\mathrm{e}} \quad 1 \text{ sol.} \\ \lambda = \left|\frac{7}{\mathrm{e}}\right|,\ \lambda = 0,\ 2 \text{ sol.} \\ -\frac{7}{\mathrm{e}} < \lambda < 0 < \lambda < \frac{7}{\mathrm{e}},\ 3 \text{ sol.} \end{cases}$$

2) a) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\left(\cos \frac{1}{3n} \right)^2 - 1 \right).$$

b) Calcolare

$$\int \frac{4x+16}{x^3+64}\, dx.$$

Sol. Per $n \to +\infty$ si applica lo sviluppo asintotico di $\cos(x)$ per $x \to 0$. Si ha

$$\left(\cos \tfrac{1}{3n}\right)^2 - 1 = \left(1 - \tfrac{1}{18n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)^2 - 1 =$$

$$1 - \tfrac{1}{9n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right) - 1 = -\tfrac{1}{9n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right).$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\left(\cos \frac{1}{3n} \right)^2 - 1 \right) = \begin{cases} -\infty \text{ per } \alpha > 2 \\ -\frac{1}{9} \text{ per} \alpha = 2 \\ 0 \text{ per } \alpha < 2. \end{cases}$$

b)

$$\int \tfrac{4x+16}{x^3+64}\, dx = \int \tfrac{4(x+4)}{(x+4)(x^2-4x+16)}\, dx = 4 \int \tfrac{1}{x^2-4x+4+12}\, dx$$

$$4 \int \tfrac{1}{(x-2)^2+12}\, dx = \tfrac{1}{3} \int \tfrac{1}{\left(\frac{x-2}{2\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dx \underset{\frac{x-2}{2\sqrt{3}}=t}{\overset{\uparrow}{=}} \tfrac{2\sqrt{3}}{3} \int \tfrac{1}{t^2+1}\, dt =$$

$$\tfrac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctang}\left(\tfrac{x-2}{2\sqrt{3}}\right).$$

3) Sia $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua in $[-1,1]$ e derivabile in $(-1,1)$. Sia $f(0) = b$ e $f'(x) < a$ per ogni $x \in (-1,1)$. Dimostrare che

$$f(x) < ax + b \quad \text{per } 0 < x < 1,$$

$$f(x) > ax + b \quad \text{per } -1 < x < 0.$$

Sol La funzione $h(x) \doteq f(x) - (ax+b)$ è tale che $h(0) = 0$ e $h'(x) = f'(x) - a < 0 \ \forall x \neq 0$. Quindi h decresce strettamente e quindi $h(x) > 0$ per $-1 < x < 0$ e $h(x) < 0$ per $0 < x < 1$. Da qui segue la tesi.