MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori
Secondo compitino

TEMA A (*Scritto*) Padova 4/11/2002

SOLUZIONI

1) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\sqrt[3]{\frac{1}{5x^2} - \frac{1}{x}} = \lambda x$$

al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

SOL. L'equazione è equivalente a

$$\sqrt[3]{\frac{1-5x}{5x^5}} = \lambda.$$

La funzione $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-5x}{5x^5}}$ ha come dominio $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ e $f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{5x^5}{1-5x}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{4x-1}{x^6}$. $x = \frac{1}{4}$ è un punto di minimo e $f\left(\frac{1}{4}\right) = -4\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$. Si ha

$$\begin{cases} \lambda < -4\sqrt[3]{\frac{4}{5}},\ \lambda \geq 0, & 1,\ \text{sol.} \\ \lambda = -4\sqrt[3]{\frac{4}{5}}, & 2\ \text{sol.} \\ -4\sqrt[3]{\frac{4}{5}} < \lambda < 0, & 3\ \text{sol.} \end{cases}$$

2) Dimostrare o smentire la seguente diseguaglianza

$$\frac{1+x}{2} > \frac{x-1}{\log x}; \qquad x < 1.$$

(Suggerimento: Prima di risolvere la diseguaglianza la si riconduca ad una della forma $\log x > \cdots$ oppure $\log x < \cdots$.)

SOL Sia $f(x) = \log x - \log y$ con $x > 0$ e $y > 0$ e $g(x) = 2\frac{x-y}{x+y}$. Si ha $f(y) = g(y) = 0$ e $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = \frac{4y}{(x+y)^2}$ ed è immediato notare che è $f'(x) > g'(x)$ per $x > 0$ e $y > 0$.

Questo comporta $f(x) > g(x)$ per $x > y$ e $f(x) < g(x)$ per $x < y$ cioè

$$\log x - \log y > 2\frac{x-y}{x+y}, \qquad \text{per } x > y \tag{A}$$

e

$$\log x - \log y < 2\frac{x-y}{x+y}, \qquad \text{per } x < y. \tag{B}$$

La diseguaglianza del TEMA A è equivalente a

$$\log x < 2\frac{x-1}{x+1} \quad \text{per } x < 1$$

che si ottiene ponendo $y = 1$ in (B) e quindi la diseguaglianza è VERA.

3) Determinare il più grande $a > 0$ tale che la funzione

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

sia invertibile in $(0, a]$ e determinare $\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2})$.

SOL. Si ha

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2}\right);$$

quindi $f'(x) > 0$ per $0 < x < \mathrm{e}$, $f'(x) < 0$ per $x > \mathrm{e}$; quindi $a = \mathrm{e}$.
Si ha

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dove x_0 è tale che $f(x_0) = (x_0)^{\frac{1}{x_0}} = \sqrt{2}$. Essendo $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $x_0 = 2$ e quindi

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{1 - \log 2}.$$

TEMA A (*Orale*)

Enunciare e dimostrare il teorema su segno della derivata seconda e convessità di una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

SOL. Vedasi testo.

TEMA B (*Scritto*)

1) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}=\lambda|x|$$

al variare di $\lambda\in\mathbf{R}$.

(Suggerimento: Dividere per $|x|$ e ricordare che $\sqrt{x^2}=\cdots$).

SOL. L'equazione è equivalente a

$$\sqrt{\frac{x^2-3}{x^5}}=\lambda.$$

La funzione $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3}{x^5}}$ ha come dominio $\{x\in\mathbf{R}:\ -\sqrt{3}\le x<0,\ x\ge\sqrt{3}\}$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to 0^-}f(x)=+\infty$ e $f'(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{x^5}{x^2-3}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{-x^2+5}{x^6}$. $x=\sqrt{5}$ è un punto di massimo e $f(\sqrt{5})=\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt[4]{5}}$. Si ha

$$\begin{cases}\lambda<0, & \text{nessuna sol}\\ \lambda=0,\ \lambda=\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt[4]{5}}, & \text{2 sol.}\\ 0<\lambda<\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt[4]{5}}, & \text{3 sol.}\\ \lambda>\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt[4]{5}}, & \text{1 sol.}\end{cases}$$

2) Dimostrare o smentire le seguenti diseguaglianze

$$\frac{2}{\mathrm{e}+x}<\frac{1-\log x}{\mathrm{e}-x};\qquad x<\mathrm{e}.$$

(Suggerimento: Prima di risolvere la diseguaglianza la si riconduca ad una della forma $\log x>\cdots$ oppure $\log x<\cdots$.)

SOL. La diseguaglianza è equivalente a

$$\log x-1<2\frac{x-\mathrm{e}}{x+\mathrm{e}}\quad\text{per } x<\mathrm{e}.$$

Si veda la soluzione dell'es. 2 del tema A e si ponga in (B) $y = \mathrm{e}$. La diseguaglianza è quindi VERA.

3) Determinare il più grande $a > 0$ tale che la funzione

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$$

sia invertibile in $(0, a]$ e determinare $\left(f^{-1}\right)'(\sqrt[3]{3})$.

SOL. Si ha

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x (-1 - \log x)\,;$$

quindi $f'(x) > 0$ per $0 < x < \mathrm{e}^{-1}$, $f'(x) < 0$ per $x > \mathrm{e}^{-1}$; quindi $a = \mathrm{e}^{-1}$.
Si ha

$$(f^{-1})'(\sqrt[3]{3}) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dove x_0 è tale che $f(x_0) = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{x_0} = \sqrt[3]{3}$. Essendo $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$, $x_0 = \frac{1}{3}$ e quindi

$$(f^{-1})'(\sqrt[3]{3}) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}(-1 + \log 3)}.$$

TEMA B (*Orale*)

Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e derivabile, si dimostri che se esiste $A \in \mathbf{R}$ tale che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, allora esiste un punto $\xi \in \mathbf{R}$ tale che $f'(\xi) = 0$. Supporre che $f(0) = B > A$.

SOL. Per definizione di limite fissato $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$ esiste $K > 0$ tale che se $|x| \geq K$ $|f(x) - A| \leq |\frac{B-A}{2}|$, cioè $-\frac{3A-B}{2} \leq f(x) \leq \frac{A+B}{2}$. Per il Teorema di Weierstrass esiste $x_M \in [-K, K]$ punto di massimo per f. Si ha $x_M \in (-K, K)$ infatti $f(x_M) \geq f(0) = B > \frac{A+B}{2} \geq f(x)$ per $|x| \geq K$ e in particolare per $|x| = K$. Quindi $f'(x_M) = 0$ e $x_M = \xi$ è il punto richiesto.

TEMA C (*Scritto*)

1) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\sqrt{\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}} = \lambda|x|$$

al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

(Suggerimento: Dividere per $|x|$ e ricordare che $\sqrt{x^2} = \cdots$).

SOL. Si proceda come nell'esercizio 1 del Tema B. Si ottiene un'equazione $f(x) = \lambda$ dove f è la simmetrica rispetto all'asse y della funzione del tema B. Le soluzioni sono le stesse.

2) Dimostrare o smentire la seguente diseguaglianza

$$\frac{2}{\log\frac{2}{x}} > \frac{2+x}{2-x}; \qquad x < 2.$$

(Suggerimento: Prima di risolvere la diseguaglianza la si riconduca ad una della forma $\log\frac{2}{x} > \cdots$ oppure $\log\frac{2}{x} < \cdots$.)

SOL. La diseguaglianza è equivalente a

$$2\frac{2-x}{2+x} < \log 2 - \log x, \quad \text{per } x < 2.$$

Si veda la soluzione dell'es. 2 del tema A e si ponga in (B) $y = 2$ moltiplicando ambo i membri per -1. La diseguaglianza è quindi VERA.

3) Determinare il più grande $a > 0$ tale che la funzione

$$f(x) = (2x)^x$$

sia invertibile in $(0, a]$ e determinare $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt[6]{\frac{1}{3}}\right)$.

SOL. Si ha

$$f'(x) = (2x)^x\left(\log(2x) + 1\right);$$

quindi $f'(x) < 0$ per $0 < x < \frac{e^{-1}}{2}$, $f'(x) > 0$ per $x > \frac{e^{-1}}{2}$; quindi $a = \frac{e^{-1}}{2}$.
Si ha

$$(f^{-1})'\left(\sqrt[6]{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dove x_0 è tale che $f(x_0) = (2x_0)^{x_0} = \sqrt[6]{\frac{1}{3}}$. Essendo $\sqrt[6]{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$, $x_0 = \frac{1}{6}$ e quindi

$$(f^{-1})'\left(\sqrt[6]{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt[6]{\frac{1}{3}}\left(-\log 3 + 1\right)}.$$

TEMA C (*Orale*)

Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua, si dimostri che se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, allora f ha minimo.

SOL. Dalla definizione di limite si ha che esiste K tale che $f(x) \geq f(0) + 1$ per $|x| \geq K$. Nell'intervallo $[-K, K]$ esiste, per il Teorema di Weierstrass, un punto x_m di minimo per f. Tale punto dà il minimo richiesto. Infatti

$$f(x_m) \leq f(0) < f(0) + 1 \leq f(x) \qquad \text{per } |x| \geq K$$

e quindi $f(x_m)$ è il minimo di f in $\mathbf{R}$.

TEMA D (*Scritto*)

1) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}}=\lambda x$$

al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

SOL. L'equazione è equivalente a

$$\sqrt[3]{\frac{x-5}{x^6}}=\lambda.$$

La funzione $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x-5}{x^6}}$ ha come dominio $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ e $f'(x)=\frac{5}{3}\left(\frac{x^6}{x-5}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{-x+6}{x^7}$. $x=6$ è un punto di massimo e $f(6)=\frac{1}{36}$. Si ha

$$\begin{cases} \lambda<0,\ 0<\lambda<\frac{1}{36}, & 2 \text{ sol.}\\ \lambda=0,\ \lambda=\frac{1}{36}, & 1 \text{ sol.}\\ \lambda>\frac{1}{36}, & \text{nessuna sol.}\end{cases}$$

2) Dimostrare o smentire la seguente diseguaglianza

$$\frac{\log x}{1-x}<\frac{-2}{x+1}; \qquad x<1.$$

(Suggerimento: Prima di risolvere la diseguaglianza la si riconduca ad una della forma $\log x>\cdots$ oppure $\log x<\cdots$.)

SOL. La diseguaglianza è equivalente a

$$\log x<2\frac{x-1}{x+1} \quad \text{per } x<1.$$

Si veda la sol. dell'es.2 del TEMA A e si ponga $y=1$ in (B).

3) Determinare il più grande $a > 0$ tale che la funzione

$$f(x) = (x)^{\frac{2}{x}}$$

sia invertibile in $(0, a]$ e determinare $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

SOL. Si ha

$$f'(x) = (x)^{\frac{2}{x}} \left(\frac{2}{x^2} - 2\frac{\log x}{x^2} \right);$$

quindi $f'(x) > 0$ per $0 < x < \mathrm{e}$, $f'(x) < 0$ per $x > \mathrm{e}$; quindi $a = \mathrm{e}$.
Si ha

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dove x_0 è tale che $f(x_0) = (x_0)^{\frac{2}{x_0}} = 2$. Si ha $x_0 = 2$ e quindi

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{1 - \log 2}.$$

TEMA D (*Orale*)

Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange nel caso particolare di una funzione $f : [0, a] \to \mathbf{R}$ con $a > 0$ e tale che $f(0) = a$ e $f(a) = 0$.

SOL. Vedasi testo.