SOLUZIONI

TEMA A (*Scritto*) Padova 18/11/2002

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\mathrm{e}^x \left(\frac{6}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \lambda.$$

Sol. Sia $f(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{6}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$. Dom f$=\mathbf{R} \setminus \{0\}$. $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$. $f'(x) = \frac{-x^2+7x-12}{x^3}\mathrm{e}^x$. $x = 3$ è punto di minimo , $x = 4$ è un punto di max. $f(3) = \frac{\mathrm{e}^3}{3}$, $f(4) = \frac{\mathrm{e}^4}{8}$.

$$\begin{cases} \lambda \leq 0 \qquad 1 \text{ sol.}, \\ 0 < \lambda < \frac{\mathrm{e}^3}{3}, \ \ \lambda > \frac{\mathrm{e}^4}{8} \qquad 2 \text{ sol.}, \\ \frac{\mathrm{e}^3}{3} < \lambda < \frac{\mathrm{e}^4}{8}, \qquad 4 \text{ sol.}, \\ \lambda = \frac{\mathrm{e}^4}{8}, \lambda = \frac{\mathrm{e}^3}{3} \qquad 3 \text{ sol.}. \end{cases}$$

2) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti

$$a) \lim_{n\to+\infty} \frac{n \log n}{(n^2+1)^\alpha}, \qquad b) \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^\alpha}, \qquad c) \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k^2}.$$

Sol. a) Il limite si presenta nella forma $\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \log n$, dove $P(n)$ e $Q(n)$ sono polinomi in n. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = +\infty \text{ o cost.} > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \log n = +\infty \tag{A}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \log n = 0. \tag{B}$$

(A) si presenta se $\alpha \leq \frac{1}{2}$, (B) se $\alpha > \frac{1}{2}$.

b) Razionalizzando si trova

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-2x} - (1+\sin x)}{x^\alpha(\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{1+\sin x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-2x-1-x+o(x)}{x^\alpha(\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{1+\sin x})}$$

che dà

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-3x+o(x)}{x^\alpha(\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{1+\sin x})} = \begin{cases} -\infty & \text{se } 1<\alpha \\ \frac{-3}{2} & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

c) Si ha

$$\int_{2n}^{n^2+1} \frac{1}{x^2}\,dx \le \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k^2} \le \int_{2n-1}^{n^2} \frac{1}{x^2}\,dx$$

da cui si ricava

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{(n^2+1)} \le \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n^2}$$

che dà

$$\frac{n^2+1-2n}{2n^{\alpha+1}(n^2+1)} \le \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k^2} \le \frac{n^2-2n+1}{n^{\alpha+2}(2n-1)}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = -1 \\ 0 & \text{se } \alpha > -1 \end{cases}$$

3) Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha (\sqrt[n^2]{13} - \sqrt[n^2]{12}).$$

Sol. La serie si presenta nella forma $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha(\sqrt[n^2]{a} - \sqrt[n^2]{b})$, con $a>0$, $b>0$. Essa è asintotica alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \frac{1}{n^2} \log \frac{a}{b}$. Quindi

$$\begin{cases} 2-\alpha > 1 & \Leftrightarrow \ \alpha < 1 \quad \text{converge} \\ 2-\alpha \le 1 & \Leftrightarrow \ \alpha \ge 1 \quad \text{diverge} \end{cases}$$

TEMA A (*Prova di recupero parziale*)

1) Risolvere la disequazione $\frac{x^2+1}{2x} \leq 1$.

Sol. $x < 0$, $x = 1$.

2) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$.

Sol. $1 < x \leq 1 + \mathrm{e}$.

3) Calcolare la derivata della funzione $h(x) = (\log x)^x$.

Sol. $(\log x)^x[\log \log x + \frac{1}{\log x}]$.

MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori
Terzo compitino

TEMA B (*Scritto*)

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x}\right)=\lambda.$$

Sol. Sia $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$. Dom f=$\mathbf{R}\backslash\{0\}$. $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. $f'(x)=\frac{-x^2-7x-12}{x^3}\mathrm{e}^{-x}$. $x=-3$ è punto di minimo , $x=-4$ è un punto di max. $f(-3)=\frac{\mathrm{e}^3}{3}$, $f(-4)=\frac{\mathrm{e}^4}{8}$.

$$\begin{cases} \lambda \leq 0 \qquad 1 \text{ sol.}, \\ 0<\lambda<\frac{\mathrm{e}^3}{3},\ \ \lambda>\frac{\mathrm{e}^4}{8} \qquad 2 \text{ sol.}, \\ \frac{\mathrm{e}^3}{3}<\lambda<\frac{\mathrm{e}^4}{8}, \qquad 4 \text{ sol.}, \\ \lambda=\frac{\mathrm{e}^4}{8}, \lambda=\frac{\mathrm{e}^3}{3} \qquad 3 \text{ sol.}. \end{cases}$$

2) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti

$$a) \lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha \log n}{(n^2+1)^6} \qquad b) \lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x-\sqrt{1-\sin x}}{x^\alpha}, \qquad c) \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=n}^{3n^2}\frac{1}{k}.$$

Sol. a) Vedasi la sol. dell'es. 2 a) del Tema A. Si conclude che

$$\begin{cases} +\infty \qquad \text{se } \alpha \geq 12 \\ 0 \qquad \text{se } \alpha < 12. \end{cases}$$

b) Razionalizzando si trova

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1+\sin x}{x^\alpha(\mathrm{e}^x+\sqrt{1-\sin x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+2x-1+x+o(x)}{x^\alpha(\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

che dà

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3x+o(x)}{x^\alpha(\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{1-\sin x})}=\begin{cases} +\infty \qquad \text{se } 1<\alpha \\ \frac{3}{2} \qquad \text{se } \alpha=1 \\ 0 \qquad \text{se } \alpha<1 \end{cases}$$

c) Si ha

$$\int_{n}^{3n^2+1} \frac{1}{x}\,dx \le \sum_{k=n}^{3n^2} \frac{1}{k} \le \int_{n-1}^{3n^2} \frac{1}{x}\,dx$$

da cui si ricava

$$\log(3n^2+1) - \log n \le \sum_{k=n}^{3n^2} \frac{1}{k} \le \log(3n^2) - \log(n-1)$$

che dà

$$\frac{1}{n^\alpha} \log \frac{3n^2+1}{n} \le \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=n}^{3n^2} \frac{1}{k} \le \frac{1}{n^\alpha} \log \frac{3n^2}{n-1}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=n}^{3n^2} \frac{1}{k} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \le 0 \\ 0 & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

3) Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$, è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{1}{\alpha}} (\sqrt[n]{13} - \sqrt[n]{12}).$$

Sol. La serie è asintotica alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{n} \log \frac{13}{12}$. Quindi

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{\alpha} > 1 & \Leftrightarrow \ \alpha < 0 \quad \text{converge} \\ 1 - \frac{1}{\alpha} \le 1 & \Leftrightarrow \ \alpha > 0 \quad \text{diverge.} \end{cases}$$

TEMA B (*Prova di recupero parziale*)

1) Risolvere la disequazione $\frac{x^2+4}{4x} > 1$.

Sol. $x > 0$, $x \neq 2$.

2) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \log(1-x)}$.

Sol. $1 - \mathrm{e} \le x < 1$.

3) Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \log\left(\frac{1}{\log x}\right)$.

Sol. $\frac{-1}{x \log x}$.

TEMA C (*Scritto*)

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\log|x| - \frac{9}{x^3} = \lambda.$$

Sol. Sia $f(x) = \log(|x|) - \frac{9}{x^3}$. Dom f=$\mathbf{R} \setminus \{0\}$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{27}{x^4}$. $x = -3$ è punto di minimo , $f(-3) = \log 3 + \frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} \lambda < \log 3 + \frac{1}{3}, & 1 \text{ sol.}, \\ \lambda = \log 3 + \frac{1}{3}, & 2 \text{ sol.}, \\ \lambda > \log 3 + \frac{1}{3}, & 3 \text{ sol.}. \end{cases}$$

2) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti

$$a) \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{(n^2+1)^7 \log n}, \qquad b) \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \sqrt{\cos x}}{x^\alpha}, \qquad c) \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k^3}.$$

Sol. a) Vedasi la sol. dell'es. 2 a) del Tema A. Si conclude che

$$\begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 14 \\ 0 & \text{se } \alpha \le 14. \end{cases}$$

b) Razionalizzando si trova

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - \cos x}{x^\alpha(e^x + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + 2x - 1 + o(x)}{x^\alpha(e^x + \sqrt{\cos x})}$$

che dà

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x + o(x)}{x^\alpha(e^x + \sqrt{\cos x})} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 1 < \alpha \\ 1 & \text{se} \alpha = 1 \\ 0 & \text{se} \alpha < 1 \end{cases}$$

c) Si ha

$$\int_{2n}^{n^2+1} \frac{1}{x^3}\,dx \le \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k^3} \le \int_{2n-1}^{n^2} \frac{1}{x^3}\,dx$$

da cui si ricava

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n)^2} - \frac{1}{(n^2+1)^2}\right) \le \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k^3} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(n^2)^2}\right)$$

che dà

$$\frac{1}{2}\frac{(n^2-1)^2 n^\alpha}{4n^2(n^2+1)^2} \le n^\alpha \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k^3} \le \frac{1}{2}\frac{(n^4-4n^2+4n-1)n^\alpha}{n^4(2n-1)^2}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k^3} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 2 \\ \frac{1}{8} & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$

3) Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt[n^3]{14} - \sqrt[n^3]{13})}{n^\alpha}.$$

Sol. La serie è asintotica alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\frac{1}{n^3}\log\frac{14}{13}$. Quindi

$$\begin{cases} 3+\alpha > 1 & \Leftrightarrow\ \alpha > -2 \quad \text{converge} \\ 3+\alpha \le 1 & \Leftrightarrow\ \alpha \le -2 \quad \text{diverge} \end{cases}$$

TEMA C (*Prova di recupero parziale*)

1) Risolvere la disequazione $\frac{(x+2)^2}{-1+x^2} > 0$.

Sol. $x > 1$, $x < -1$, $x \ne -2$.

2) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{-1-\log(x+1)}$.

Sol. $-1 < x \le -1 + \mathrm{e}^{-1}$.

3) Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \log\left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Sol. $\frac{1}{x\log x}$.

TEMA D (*Scritto*)

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$-\log|x| + 2\frac{1}{x^3} = \lambda.$$

Sol. Sia $f(x) = -\log(|x|) + \frac{2}{x^3}$. Dom f$=\mathbf{R}\setminus\{0\}$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$. $f'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{6}{x^4}$. $x = -\sqrt[3]{6}$ è punto di max. , $f(-\sqrt[3]{6}) = -\frac{1}{3}(\log 6 + 1)$.

$$\begin{cases} \lambda > -\frac{1}{3}(\log 6 + 1), & 1 \text{ sol.}, \\ \lambda = -\frac{1}{3}(\log 6 + 1), & 2 \text{ sol.}, \\ \lambda < -\frac{1}{3}(\log 6 + 1), & 3 \text{ sol.}. \end{cases}$$

2) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti

$$a) \lim_{n\to +\infty} \frac{n}{(n^2+1)^\alpha \log n}, \qquad b) \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\cos x} - \mathrm{e}^{-x}}{x^\alpha}, \qquad c) \lim_{n\to +\infty} n^\alpha \sum_{k=2n}^{n^3} \frac{1}{k}.$$

Sol. a) Vedasi la sol. dell'es. 2 a) del Tema A. Si conclude che

$$\begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } \alpha \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

b) Razionalizzando si trova

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\mathrm{e}^{-2x} + \cos x}{x^\alpha(\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1 + 2x + 1 + o(x)}{x^\alpha(\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{\cos x})}$$

che dà

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x + o(x)}{x^\alpha(\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{\cos x})} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 1 < \alpha \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

c) Si ha

$$\int_{2n}^{n^2+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k} \leq \int_{2n-1}^{n^2} \frac{1}{x}\,dx$$

da cui si ricava

$$\log(n^2+1) - \log(2n) \leq \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k} \leq \log(n^2) - \log(2n-1)$$

che dà

$$n^\alpha \log \frac{n^2+1}{2n} \leq n^\alpha \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k} \leq n^\alpha \log \frac{n^2}{2n-1}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \sum_{k=2n}^{n^2} \frac{1}{k} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

3) Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt[n]{13} - \sqrt[n]{12})}{n^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Sol. La serie è asintotica alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}+1}} \log \frac{13}{12}$. Quindi

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} + 1 > 1 & \Leftrightarrow \ \alpha > 0 & \text{converge} \\ \frac{1}{\alpha} + 1 \leq 1 & \Leftrightarrow \ \alpha \leq 0 & \text{diverge} \end{cases}$$

TEMA D (*Prova di recupero parziale*)

1) Risolvere la disequazione $\frac{(2-x)^2}{-9+x^2} < 0$.

Sol. $-3 < x < 3$, $x \neq 2$.

2) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-2)}$.

Sol. $2 < x \leq 2 + \mathrm{e}$.

3) Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \frac{1}{\log(\log x)}$.

Sol. $\frac{-1}{x \log x \log^2(\log x)}$.