SOLUZIONI

TEMA A (*Scritto*) Padova 25/11/2002

1) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{\log x - 2} = \lambda x$$

al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol. Sia $f(x) = \frac{1}{x(\log x - 2)}$. L'equazione data è equivalente a $f(x) = \lambda$. Dom $f = \{x > 0,\ x \neq e^2\}$. $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to \mathrm{e}^{2-}} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to \mathrm{e}^{2+}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$. $f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2(\log x - 2)^2}$. $f'(x) = 0$ per $x = \mathrm{e}$. $x = \mathrm{e}$ è punto di massimo. $f(\mathrm{e}) = -1/\mathrm{e}$. Quindi

$$\begin{cases} \lambda < -1/\mathrm{e} & 2 \text{ sol.} \\ \lambda = -1/\mathrm{e} & 1 \text{ sol.} \\ -1/\mathrm{e} < \lambda \leq 0 & \text{no sol.} \\ \lambda > 0 & 1 \text{ sol..} \end{cases}$$

2) Sia $f(x) = \sqrt{x^2 + |x-1|}$.

a) Determinarne il dominio.

b) Determinarne gli asintoti.

Sol. a) Dom$f = \mathbf{R}$.

b) Si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$,

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = +\frac{1}{2}$,

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}-x} = \frac{1}{2}$.

Quindi l'asintoto destro è $y = x + \frac{1}{2}$, l'asintoto sinistro è $y = -x + \frac{1}{2}$.

3) Determinare il polinomio $P(x)$ di secondo grado tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - P(x)}{x^2} = 0.$$

Sol. Sia $f(x) = e^{\sin x}$. Allora $P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$. Quindi

$$P(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

4) Determinare al variare di $p > 0$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p} - \log\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)\right)^{2p}.$$

Sol. Per $p > 0$ la serie è asintotica a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n^{2p}}\right)^{2p} = \frac{1}{4^p} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\,4p^2}}.$$

Quindi

$$\begin{cases} 4p^2 > 1 & \Leftrightarrow \quad p > \frac{1}{2} \text{ converge} \\ 4p^2 \le 1 & \Leftrightarrow \quad 0 < p \le \frac{1}{2} \text{ diverge.} \end{cases}$$

5) Determinare

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(1-\cos t)\, dt}{(x - \frac{\pi}{2})^2}.$$

Sol. Applicando la regola di De L'Hospital si trova

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(1-\cos t)\, dt}{(x - \frac{\pi}{2})^2} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(1-\cos t)\, dt - x\sin(1-\cos x)}{2(x-\frac{\pi}{2})} =$$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{se } x \to \frac{\pi}{2}^+ \\ +\infty & \text{se } x \to \frac{\pi}{2}^- \end{cases}$$

TEMA A (*Orale*)

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali con $a_n > 0$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Vedasi testo.

TEMA B (*Scritto*)

1) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{2-\log x} = \frac{\lambda}{x}$$

al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol. Sia $f(x) = \frac{x}{2-\log x}$. L'equazione è equivalente a $f(x) = \lambda$. Si ha Dom $f = \{x > 0,\ x \neq \mathrm{e}^2\}$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^{2-}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^{2+}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$. $f'(x) = \frac{3-\log x}{(\log x - 2)^2}$. $f'(x) = 0$ per $x = \mathrm{e}^3$. $x = \mathrm{e}^3$ è punto di massimo. $f(e^3) = -\mathrm{e}^3$. Quindi

$$\begin{cases} \lambda < -\mathrm{e}^3 & 2 \text{ sol.}, \\ \lambda = -\mathrm{e}^3 & 1 \text{ sol.}, \\ -\mathrm{e}^3 < \lambda \leq 0 & \text{no sol.}, \\ \lambda > 0 & 1 \text{ sol.}. \end{cases}$$

2) Sia $f(x) = \sqrt{x^2 + |4x-8|}$.

a) Determinarne il dominio.

b) Determinarne gli asintoti.

Sol.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4x-8} & \text{se } x \geq 2 \\ \sqrt{x^2-4x+8} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Quindi
a) Dom$f = \mathbf{R}$.

b) Si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x-8} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x-8}{\sqrt{x^2+4x-8}+x} = 2$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$,
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-4x+8} + x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-4x+8}{\sqrt{x^2-4x+8}-x} = 2$.
Quindi l'asintoto destro è $y = x+2$, l'asintoto sinistro è $y = -x+2$.

3) Determinare $a, b, c \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\sin x} - \left[a(x-\frac{\pi}{2})^2 + b(x-\frac{\pi}{2}) + c\right]}{(x-\frac{\pi}{2})^2} = 0.$$

Sol. Sia $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$. Allora $c = f(\frac{\pi}{2})$, $b = f'(\frac{\pi}{2})$, $a = \frac{f''(\frac{\pi}{2})}{2}$. Quindi

$$a = -\frac{\mathrm{e}}{2},\ b = 0,\ c = \mathrm{e}.$$

4) Determinare al variare di $p > 0$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n^p}\right)^{2p+1}.$$

Sol. Per $p > 0$ la serie è asintotica a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n^{2p}}\right)^{2p+1} = \frac{1}{2^{2p+1}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4p^2+2p}}.$$

Quindi

$$\begin{cases} 4p^2 + 2p > 1 & \Leftrightarrow \quad p > \sqrt{5} - 1 \text{ converge} \\ 4p^2 + 2p \leq 1 & \Leftrightarrow \quad 0 < p \leq \sqrt{5} - 1 \text{ diverge.} \end{cases}$$

5) Determinare

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x \int_x^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(1 - \cos t)\, dt}{(x - \frac{\pi}{2})^2}.$$

Sol. Applicando la regola di De L'Hospital si trova

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x \int_x^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(1 - \cos t)\, dt}{(x - \frac{\pi}{2})^2} =$$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{se}\, x \to \frac{\pi}{2}^+ \\ +\infty & \text{se}\, x \to \frac{\pi}{2}^- \end{cases}$$

TEMA B (*Orale*)

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali con $a_n > 0$. Dimostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$$

Vedasi testo.

TEMA C (*Scritto*)

1) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{2+\log x} = \frac{\lambda}{x}$$

al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol. Sia $f(x) = \frac{x}{2+\log x}$. L'equazione è equivalente a $f(x) = \lambda$. Si ha Dom $f = \{x > 0,\ x \neq \mathrm{e}^{-2}\}$. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to \mathrm{e}^{-2-}} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to \mathrm{e}^{-2+}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. $f'(x) = \frac{1+\log x}{(\log x+2)^2}$. $f'(x) = 0$ per $x = 1/\mathrm{e}$. $x = 1/\mathrm{e}$ è punto di minimo. $f(1/\mathrm{e}) = 1/\mathrm{e}$. Quindi

$$\begin{cases} \lambda < 0 & 1 \text{ sol.,} \\ \lambda = 0 & \text{nessuna sol,} \\ 0 < \lambda < 1/\mathrm{e} & \text{no sol.,} \\ \lambda = 1/\mathrm{e} & 1 \text{ sol.,} \\ \lambda > 1/\mathrm{e} & 2 \text{ sol..} \end{cases}$$

2) Sia $f(x) = \sqrt{x^2 + |2-x|}$.

a) Determinarne il dominio.

b) Determinarne gli asintoti.

Sol.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x + 2} & \text{se } x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 + x - 2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Quindi
a) Dom$f = \mathbf{R}$.

b) Si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$,
$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 2} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+2}{\sqrt{x^2-x+2}+x} = \frac{-1}{2}$,

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$,
$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 + x - 2} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x-2}-x} = -\frac{1}{2}$.

Quindi l'asintoto destro è $y = x - \frac{1}{2}$, l'asintoto sinistro è $y = -x + 1/2$.

3) Determinare $a, b, c \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+\cos x) - \big[a(x-\frac{\pi}{2})^2 + b(x-\frac{\pi}{2}) + c\big]}{(x-\frac{\pi}{2})^2} = 0.$$

Sol. Sia $f(x) = \log(1+\cos x)$. Allora $c = f(\frac{\pi}{2})$, $b = f'(\frac{\pi}{2})$ e $a = \frac{f''(\frac{\pi}{2})}{2}$. Quindi

$$a = -\frac{1}{2},\ b = -1,\ c = 0.$$

4) Determinare al variare di $p > 0$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p} - \sin\frac{1}{n^p}\right)^{2p+1}.$$

Sol. La serie è asintotica a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{6n^{3p}}\right)^{2p+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{2p+1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{6p^2+3p}}.$$

Quindi

$$\begin{cases} 6p^2 + 3p > 1 & \Leftrightarrow \quad p > \frac{\sqrt{33}-3}{12} \text{ converge} \\ 6p^2 + 3p \le 1 & \Leftrightarrow \quad 0 < p \le \frac{\sqrt{33}-3}{12} \text{ diverge.} \end{cases}$$

5) Determinare

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x\int_x^{\frac{\pi}{2}} e^{1+\cos t}\,dt}{(x-\frac{\pi}{2})^2}.$$

Sol. Applicando la regola di De L'Hospital si trova

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x\int_x^{\frac{\pi}{2}} e^{1+\cos t}\,dt}{(x-\frac{\pi}{2})^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\int_x^{\frac{\pi}{2}} e^{1+\cos x}\,dt - x e^{1+\cos x}}{2(x-\frac{\pi}{2})} =$$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{se } x \to \frac{\pi}{2}^+ \\ +\infty & \text{se } x \to \frac{\pi}{2}^- \end{cases}$$

TEMA C (*Orale*)

Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Sia $\max f = 1$ e $\min f = -1$. Dimostrare che esiste $\xi \in [a,b]$ tale che $f(\xi) = 0$.

Sol. Sia x_M tale che $f(x_M) = 1$ e x_m tale che $f(x_m) = -1$. Si applica il teorema degli zeri delle funzioni continue all'intervallo $[x_M, x_m]$ e si ottiene la tesi.

1) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{3-\log x} = \lambda x$$

al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sol. Sia $f(x) = \frac{1}{x(3-\log x)}$. L'equazione data è equivalente a $f(x) = \lambda$. Dom $f = \{x > 0,\ x \neq e^3\}$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to e^{3^-}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to e^{3^+}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. $f'(x) = \frac{\log x - 2}{x^2(3-\log x)^2}$. $f'(x) = 0$ per $x = e^2$. $x = e^2$ è punto di minimo. $f(e^2) = \frac{1}{e^2}$. Quindi

$$\begin{cases} \lambda < 0 & 1 \text{ sol.} \\ 0 \le \lambda < \frac{1}{e^2} & \text{no sol.} \\ \lambda = \frac{1}{e^2} & 1 \text{ sol} \\ \lambda > \frac{1}{e^2} & 2 \text{ sol..} \end{cases}$$

2) Sia $f(x) = \sqrt{2x^2 + |1-2x|}$.

a) Determinarne il dominio.

b) Determinarne gli asintoti.

Sol.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 2x + 1} & \text{se } x \le \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x^2 + 2x - 1} & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi
a) Dom$f = \mathbf{R}$.

b) Si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{2}$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \sqrt{2}x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+2x-1} - \sqrt{2}x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2+2x-1}+\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\sqrt{2}$,
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-2x+1} + \sqrt{2}x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x+1}{\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Quindi l'asintoto destro è $y = \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'asintoto sinistro è $y = -\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) Determinare $a, b, c \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x \to \pi} \frac{e^{1+\cos x} - a(x-\pi)^2 + b(x-\pi) + c}{(x-\pi)^2} = 0.$$

Sol. Sia $f(x) = e^{1+\cos x}$. Allora $c = f(\pi)$, $b = f'(\pi)$ e $a = \frac{f''(\pi)}{2}$. Quindi

$$a = 1/2, b = 0, c = 1.$$

4) Determinare al variare di $p > 0$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{=\infty} \left(e^{\frac{1}{n^p}} - 1\right)^{p+2}.$$

Sol. La serie è asintotica a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^p}\right)^{p+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p^2+2p}}.$$

Quindi

$$\begin{cases} p^2 + 2p > 1 & \Leftrightarrow \qquad p > 1 + \sqrt{2} \text{ converge} \\ p^2 + 2p \leq 1 & \Leftrightarrow \ 0 < p \leq 1 + \sqrt{2} \text{ diverge.} \end{cases}$$

5) Determinare

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x \int_x^1 \operatorname{arctg}(\sin t)\, dt}{(x - \frac{\pi}{2})^2}.$$

Sol. Applicando la regola di De L'Hospital si trova

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x \int_x^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\sin t)\, dt}{(x - \frac{\pi}{2})^2} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\int_x^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\sin t)\, dt - x\operatorname{arctg}(\sin x)}{2(x - \frac{\pi}{2})} =$$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{se } x \to \frac{\pi}{2}^+ \\ +\infty & \text{se } x \to \frac{\pi}{2}^- \end{cases}$$

TEMA D (*Orale*)

Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Sia $\max f = 2$ e $\min f = 0$. Dimostrare che esiste $\xi \in [a, b]$ tale che $f(\xi) = 1$.

Vedasi Tema C.