MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C.Sartori
Primo compitino

TEMA A (*Scritto*) Padova 17/10/2002

SOLUZIONI

1) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ data da $f(x) = \frac{x+x^2}{2-x}$. Sia $A = f^{-1}([2, +\infty[)$.

a) Determinare l'insieme A.

b) Dire se A è superiormente limitato o inferiormente limitato e determinare $\sup A$ e $\inf A$.

c) Dire se $\sup A$ e $\inf A$ sono rispettivamente $\max A$ e $\min A$.

SOL. a) Si ha $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{x+x^2}{2-x} \geq 2\right\} =]-\infty, -4] \cup [1, 2[$.

b)+c) A non è inferiormente limitato, $\inf A = -\infty$ e A non ha minimo; A è superiormente limitato, $\sup A = 2$ e A non ha max perchè $2 \notin A$.

2) Si considerino i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{10^n + \alpha n^{10}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|\alpha|n^2 + \sqrt{n}}{2n^2}\right)^{\sqrt{n^3}} .$$

a) Calcolarli per $\alpha = 2$.

b) Calcolarli al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

SOL. Il primo limite è della forma

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + \alpha n^p}$$

con $a > 1$, $p > 0$ e $\alpha \in \mathbf{R}$. In questo caso $a = 10 = p$.
Si usa il teorema del confronto.
Per $\alpha \geq 0$ si ha per n sufficientemente grande

$$\sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a^n + \alpha n^p} \leq \sqrt[n]{(\alpha+1)a^n}$$

dato che $n^p \leq a^n$ per n grande. I limiti del membro di destra e sinistra sono entrambi a dato che $\sqrt[n]{\alpha+1} \to 1$ per $n \to +\infty$.
Per $\alpha < 0$ e n sufficientemente grande si ha

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}a^n} \leq \sqrt[n]{a^n + \alpha n^p} \leq \sqrt[n]{a^n}$$

dove la seconda diseguaglianza è ovvia mentre la prima dipende dal fatto che $(-\alpha)n^p \leq \frac{a^n}{2}$ per n grande e $\alpha < 0$ da cui $(\alpha)n^p \geq -\frac{a^n}{2}$. I limiti di entrambi i membri valgono a.

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + \alpha n^p} = a \qquad \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

Il secondo limite è della forma

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|\alpha| n^p + n^q}{\beta n^p}\right)^{n^{p-q}}$$

con $p > q$ e $\beta \in \mathbf{N}$, e, nel caso specifico, $p = 2$, $q = \frac{1}{2}$ e $\beta = 2$.
Nel caso $|\alpha| = \beta$ il limite diventa della forma

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\beta n^{p-q}}\right)^{n^{p-q}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\beta}}.$$

Per $|\alpha| > \beta$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|\alpha| n^p + n^q}{\beta n^p}\right)^{n^{p-q}} \geq \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|\alpha|}{\beta}\right)^{n^{p-q}} = +\infty.$$

Per $|\alpha| < \beta$ si ha, tenendo conto che per n grande $n^q < \varepsilon n^p$ con ε un numero arbitrario fissato,

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|\alpha| n^p + n^q}{\beta n^p}\right)^{n^{p-q}} \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|\alpha| n^p + \varepsilon n^p}{\beta n^p}\right)^{n^{p-q}} \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|\alpha| + \varepsilon}{\beta}\right)^{n} = 0$$

purchè si scelga ε tale che $\left(\frac{|\alpha|+\varepsilon}{\beta}\right) < 1$ cosa che si può fare perchè $|\alpha| < \beta$.
Concludendo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|\alpha| n^p + n^q}{\beta n^p}\right)^{n^{p-q}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{\beta}} & \text{se} \quad |\alpha| = \beta \\ +\infty & \text{se} \quad |\alpha| > \beta \\ 0 & \text{se} \quad |\alpha| < \beta \end{cases}$$

TEMA A (*Orale*)

1) Dimostrare per induzione che

$$(10)^{\frac{n}{2}} \geq 4n \qquad \forall n \geq 2.$$

SOL. Per $n = 2$ la disequazione è verificata essendo $10 \geq 8$. Per $n = 1$ è falsa.
Assumendo la disequazione vera per n la dimostro per $n + 1$.

$$10^{\frac{n+1}{2}} = (10)^{\frac{n}{2}} 10^{\frac{1}{2}} \geq 10^{\frac{1}{2}} 4n \overset{?}{\geq} 4(n+1).$$

L'ultima disequazione è equivalente a $\sqrt{10}n \geq (n+1)$ e

$$\sqrt{10}n \geq 3n \geq n + 1 \qquad \forall n \geq 1.$$

Quindi la disequazione è verificata per ogni $n \geq 2$.

TEMA B (*Scritto*)

1) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ data da $f(x) = \frac{x+x^2}{1-x}$. Sia $A = f^{-1}(]-\infty, 1[)$.

a) Determinare l'insieme A.

b) Dire se A è superiormente limitato o inferiormente limitato e determinare $\sup A$ e $\inf A$.

c) Dire se $\sup A$ e $\inf A$ sono rispettivamente $\max A$ e $\min A$.

SOL. a) Si ha $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{x+x^2}{1-x} < 1\right\} = \left]-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right[\cup]1, +\infty[$

b)+c) A non è superiormente limitato, $\sup A = \infty$ e A non ha max;
A è inferiormente limitato, $\inf A = -1-\sqrt{2}$ e A non ha min perchè $-1-\sqrt{2} \notin A$.

2) Si considerino i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + \alpha n^9}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n} + |\alpha| n}{2n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

a) Calcolarli per $\alpha = 2$.

b) Calcolarli al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

SOL. Per il primo limite si veda la sol. dell'esercizio corrispondente del tema A con $a = 3$ e $p = 9$.

Per il secondo limite si veda la sol.dell'esercizio corrispondente del tema A con $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$ e $\beta = 2$.

TEMA B (*Orale*)

1) Dimostrare per induzione che

$$(5)^n \geq 2(n+3) \qquad \forall n \geq 2.$$

SOL Per $n = 2$ la disequazione è verificata essendo $25 \geq 10$. È falsa per $n = 1$.
Assumendo la disequazione vera per n la dimostro per $n+1$.

$$5^{n+1} = 5^n 5 \geq 2(n+3)5 \overset{?}{\geq} 2(n+4).$$

L'ultima disequazione è verificata essendo

$$5n + 15 \geq n + 4 \qquad \forall n \geq 1.$$

Quindi la disequazione è verificata per ogni $n \geq 2$.

TEMA C (*Scritto*)

1) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ data da $f(x) = \frac{x-x^2}{3-x}$. Sia $A = f^{-1}(]-\infty, -1])$.

a) Determinare l'insieme A.
b) Dire se A è superiormente limitato o inferiormente limitato e determinare $\sup A$ e $\inf A$.
c) Dire se $\sup A$ e $\inf A$ sono rispettivamente $\max A$ e $\min A$.

SOL. a) Si ha $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{x-x^2}{3-x} \leq -1\right\} = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 3\right[$

b)+c) A è superiormente limitato, $\sup A = 3$ e A non ha max perchè $3 \notin A$; A non è inferiormente limitato, $\inf A = -\infty$ e A non ha min.

2) Si considerino i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4^n + \alpha n^4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|\alpha| n^3 + n}{3n^3}\right)^{n^2}.$$

a) Calcolarli per $\alpha = 3$.

b) Calcolarli al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

SOL. Per il primo limite si veda la sol. dell'esercizio corrispondente del tema A con $a = 4 = p$.

Per il secondo limite si veda la sol. dell'esercizio corrispondente del tema A con $p = 3 = \beta$ e $q = 1$.

TEMA C (*Orale*)

2) Dimostrare per induzione che

$$7^{\frac{n}{3}} \geq \sqrt[3]{7}\, n \qquad \forall n \geq 3.$$

SOL. Per $n = 3$ la disequazione è verificata essendo $7 \geq 3\sqrt[3]{7}$. Notare che è anche vera per $n = 1$ mentre è falsa per $n = 2$.
Assumendo la disequazione vera per n la dimostro per $n + 1$.

$$7^{\frac{n+1}{3}} = 7^{\frac{n}{3}} 7^{\frac{1}{3}} \geq 7^{\frac{1}{3}} 7^{\frac{1}{3}} n \overset{?}{\geq} 7^{\frac{1}{3}}(n+1).$$

L'ultima disequazione è verificata essendo

$$7^{\frac{1}{3}} n \geq (n+1) \qquad \forall n \geq 2.$$

Quindi la disequazione è verificata per ogni $n \geq 3$.

TEMA D (*Scritto*)

1) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ data da $f(x) = \frac{x-x^2}{1+x}$. Sia $A = f^{-1}(]-1, +\infty[)$.

a) Determinare l'insieme A.
b) Dire se A è superiormente limitato o inferiormente limitato e determinare $\sup A$ e $\inf A$.
c) Dire se $\sup A$ e $\inf A$ sono rispettivamente $\max A$ e $\min A$.

SOL. a) Si ha $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{x-x^2}{1+x} > -1\right\} =]-\infty, -1[\cup]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[$

b)+c) A è superiormente limitato, $\sup A = 1+\sqrt{2}$ e A non ha max essendo $1+\sqrt{2} \notin A$;
A non è inferiormente limitato, $\inf A = -\infty$ e A non ha min.

2) Dati i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^3 + |\alpha|n^4}{4n^4}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4^n + \alpha n^8}$$

a) Calcolarli per $\alpha = 4$.

b) Calcolarli al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

SOL. Per il primo limite si veda la sol. dell'esercizio corrispondente del tema A con $p = 4 = \beta$ e $q = 3$.

Per il secondo limite si vada la sol. dell'esercizio corrispondente del Tema A con $a = 4$ e $p = 8$.

TEMA D (*Orale*)

2) Dimostrare per induzione che

$$(13)^n \geq 13(n+1) \qquad \forall n \geq 2.$$

SOL. Per $n = 2$ la disequazione è verificata dato che $13^2 \geq 13(3)$. Notare che è falsa per $n = 1$.
Assumendo la disequazione vera per n la dimostro per $n+1$.

$$13^{n+1} = 13^n 13 \geq 13^2(n+1) \overset{?}{\geq} 13(n+2).$$

L'ultima disequazione è equivalente a

$$13n + 13 \geq (n+2)$$

che è verificata $\forall n \geq 1$. Quindi la disequazione è verificata per ogni $n \geq 2$.