

MATEMATICA 1
Ingegneria Ambientale, Civile, Edile
Proff. P. Ciatti, E. Gonzalez, C. Sartori

TEMA A

Padova 7/9/2004

SOLUZIONI

1) Determinare, al variare di $\lambda > 0$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\log(\lambda|x|) = 2x.$$

Sol. $\lambda > 2e$, 3 sol.

$\lambda = 2e$, 2 sol.

$\lambda < 2e$, 1 sol.

2) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \sin \frac{1}{n^\alpha} \right)^n,$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=n}^{9n} k^{11}.$$

Sol. a)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \sin \frac{1}{n^\alpha} \right)^n = \begin{cases} e^{-1} & \text{se } \alpha = 1 \\ 1 & \text{se } \alpha > 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=n}^{9n} k^{11} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 12 \\ \frac{9^{12}-1}{12} & \text{se } \alpha = 12 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 12 \end{cases}$$

3) Trovare un polinomio $P(x)$ di grado al più 2, tale che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x) - \frac{e^x}{x}}{(x-1)^2} = 0.$$

Sol. $P(x) = e + \frac{e}{2}(x-1)^2$.

4) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$,

$$\int \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx$$

e determinare poi per quali $\alpha > 0$ è finito

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx.$$

Sol.

$$\int \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{(1-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \log(|1-x|) & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

5) Fra tutte le rette per (a, b) , $a > 0$, $b < 0$, trovare quella che rende minima l'area del triangolo determinato da tale retta e dagli assi $(x, 0)$, $x > 0$, e $(0, y)$, $y < 0$.

Sol. Equazione della retta $y = b + m(x - a)$, Area triangolo = $A(m) = \frac{1}{2}|(-\frac{b}{m} + a)(b - ma)|$ per $m > 0$. Si ha $\max_{m>0} A(m) = A(-\frac{b}{a}) = \frac{1}{2}|2ab + \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}|$

MATEMATICA 1
Ingegneria Ambientale, Civile, Edile
Proff. P. Ciatti, E. Gonzalez, C. Sartori

TEMA B

Padova 7/9/2004

1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^{\lambda+x} = 2x.$$

Sol. $\lambda < \log \frac{2}{e}$, 2 sol

$\lambda = \log \frac{2}{e}$, 1 sol.

$\lambda > \log \frac{2}{e}$, nessuna sol.

2) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$,

a)
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{n^\alpha} \right)^n,$$

b)
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=n}^{7n} k^{13}.$$

Sol. a)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{n^\alpha} \right)^n = \begin{cases} e^{-1/2} & \text{se } \alpha = 1/2 \\ 1 & \text{se } \alpha > 1/2 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1/2. \end{cases}$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=n}^{7n} k^{13} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 14 \\ \frac{7^{14}-1}{14} & \text{se } \alpha = 14 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 14 \end{cases}$$

3) Trovare un polinomio $P(x)$ di grado al più 2, tale che

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{P(x) - \frac{e^x}{x}}{(x-2)^2} = 0.$$

Sol. $P(x) = \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4}(x-2) + \frac{e^2}{8}(x-2)^2.$

4) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$,

$$\int \frac{1}{x^\alpha} dx$$

e determinare poi per quali $\alpha > 0$ è finito

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Sol.

$$\int \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \log(|x|) & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \frac{2}{-1+\alpha} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

5) Fra tutte le rette per (a, b) , $a < 0$, $b > 0$, trovare quella che rende minima l'area del triangolo determinato da tale retta e dagli assi $(x, 0)$, $x < 0$, e $(0, y)$, $y > 0$.

Sol. Vedasi Tema A