

Tema 1

SOLUZIONI

1. Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6} - |x|,$$

si chiede di

- a) determinare il dominio ed eventuali asintoti;
- b) determinare gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di non derivabilità, i punti di massimo e minimo, nonché tracciare approssimativamente il grafico.

Sol. a) $\text{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} : x \leq -3, x \geq -2\}$. Asintoto orizzontale destro $y = 5/2$, sinistro $y = -5/2$.

b) Monotona crescente per $x \geq -2$, decrescente per $x \leq -3$. Minimo relativo per $x = -2$ e per $x = -3$. Tali punti sono anche punti di non derivabilità.

2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \log(1+t) \cos(t) dt - \frac{1}{2}x \sin(x)}{x^3}.$$

b) Determinare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo tale che il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos\left(\frac{\pi-x}{2+x}\right)}{x^\alpha}$$

risulti finito e diverso da zero.

Sol. a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \log(1+t) \cos(t) dt - \frac{1}{2}x \sin(x)}{x^3} = -1/6.$$

b) $\alpha = 1$.

3. Calcolare i seguenti integrali

a)

$$\int \frac{2t+1}{t^2-2t+2} dt.$$

b)

$$\int \log(4+2x+x^2)dx.$$

Sol. a)

$$\int \frac{2t+1}{t^2-2t+2} dt = \log(t^2-2t+2) + 3\operatorname{arctg}(t-1).$$

b)

$$\int \log(4+2x+x^2)dx = (x+1)\log(4+2x+x^2) - 2x + 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}.$$

Esame di Matematica 1 – 17 Settembre 2004

Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e
Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio

Tema 2

1. a) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \log(1+2t) \cos(t) dt - \sin(x^2)}{x^3}$$

Sol.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \log(1+2t) \cos(t) dt - \sin(x^2)}{x^3} = -2/3$$

b) Determinare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo tale che il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos\left(\frac{\pi-2x}{2-x}\right)}{x^\alpha}$$

risulti finito e diverso da zero.

Sol. $\alpha = 1$.

2. Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2} - |x|,$$

si chiede di

- a) determinare il dominio ed eventuali asintoti;
- b) determinare gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di non derivabilità, i punti di massimo e minimo, nonché tracciare approssimativamente il grafico.

Sol. a) $\text{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} : x \leq -2, x \geq -1\}$. Asintoto orizzontale destro $y = 3/2$, sinistro $y = -3/2$.

b) Monotona crescente per $x \geq -1$, decrescente per $x \leq -2$. Minimo relativo per $x = -2$ e per $x = -1$. Tali punti sono anche punti di non derivabilità.

3. Calcolare i seguenti integrali

a)

$$\int \frac{3t}{t^2 + 2t + 1} dt,$$

b)

$$\int \log(3 + 2x + x^2) dx.$$

Sol. a)

$$\int \frac{3t}{t^2 + 2t + 1} dt = 3 \log |t + 1| + 3 \frac{1}{t + 1}.$$

b)

$$\int \log(3 + 2x + x^2) dx = (x + 1) \log(x^2 + 2x + 3) - 2x + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}}.$$