MATEMATICA 3
Ingegneria Civile e Ambientale
Prof E. Gonzalez e Prof. C. Sartori
Primo compitino

SOLUZIONI

TEMA A   Padova 24/3/2004

1) Determinare il piano tangente e la retta normale
a) al grafico di $z = x^2 - y^2 + \text{arctg}(1 - xy)$ per il punto $(1, 1, 0)$;
b) alla superficie definita da

$$x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2} + z\sqrt{x^2 + y^2} - 2 = 0$$

per il punto $(0, 1, 1)$.

Sol.

a) $z = x - 1 - 3(y - 1)$; $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(1, -3, -1),\ \lambda \in \mathbf{R}$.
b) $\sqrt{2}\,x + 2(y-1) + 2(z-1) = 0$; $(x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(\sqrt{2}, 2, 2),\ \lambda \in \mathbf{R}$.

2) Calcolare $y'(2)$, $y''(2)$, dove $y = y(x)$ è definita implicitamente da

$$x^3 - y^3 + x^2 + 10y - 12 = 0$$

nell'intorno di $(2, 0)$.

Sol.

$$y'(2) = -\frac{8}{5},\ \ y''(2) = -\frac{7}{5}.$$

3) a) Calcolare $\text{grad} f(x_0, y_0)$, sapendo che f è differenziabile e che

$$D_{\left(\frac{3}{\sqrt{58}}, \frac{7}{\sqrt{58}}\right)} f(x_0, y_0) = \sqrt{58}\ , \qquad D_{\left(-\frac{7}{\sqrt{58}}, \frac{3}{\sqrt{58}}\right)} f(x_0, y_0) = \sqrt{58}.$$

b) Posto $g(x, y) = x^{xy}$, $x > 0$, calcolare $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$.

Sol.

a)
$$\text{grad} f(x_0, y_0) = (-4, 10).$$

b)
$$\frac{\partial g}{\partial x} = x^{xy}(y \log x + y),\ \ \frac{\partial g}{\partial y} = x^{xy} x \log x.$$

4) a) Trovare tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} y'' + y = \sin x \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

b) Risolvere

$$1)\ \begin{cases} y' = (x+1) y \log y \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} y' = (x+1) y \log y \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Sol.

a)
$$y(x) = c \sin x - \frac{1}{2} x \cos x, \quad c \in \mathbf{R}$$

b)
$$1) \quad y = 1, \qquad 2) \quad y(x) = 2^{e^{\frac{x^2}{2}+x}}.$$

MATEMATICA 3
Ingegneria Civile e Ambientale
Prof E. Gonzalez e Prof. C. Sartori
Primo compitino

TEMA B — Padova 24/3/2004

1) Determinare il piano tangente e la retta normale
a) al grafico di $z = xy - \log(x^2 + y^2)$ per il punto $(0, 1, 0)$;
b) alla superficie definita da

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

per il punto $(1, 1, 1)$.

Sol.

a) $\quad z = x - 2(y - 1); \qquad (x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(1, -2, -1),\ \lambda \in \mathbf{R}.$

b) $\quad x + y + z = 3; \qquad (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 1),\ \lambda \in \mathbf{R}.$

2) Calcolare $y'(1)$, $y''(1)$, dove $y = y(x)$ è definita implicitamente da

$$x^3 + y^5 + x^2 - y - 2 = 0$$

nell'intorno di $(1, 0)$.

Sol.

$$y'(1) = 5,\ \ y''(1) = 8.$$

3) a) Calcolare $\mathrm{grad} f(x_0, y_0)$, sapendo che f è differenziabile e che

$$D_{\left(\frac{2}{\sqrt{68}}, \frac{8}{\sqrt{68}}\right)} f(x_0, y_0) = \sqrt{68}\ , \qquad D_{\left(-\frac{8}{\sqrt{68}}, \frac{2}{\sqrt{68}}\right)} f(x_0, y_0) = \sqrt{68}.$$

b) Posto $g(x, y) = (x + y)^y$, $x > 0$, $y > 0$, calcolare $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\quad \frac{\partial g}{\partial y}$.

Sol.

a) $\quad \mathrm{grad} f(x_0, y_0) = (-6, 10).$

b) $$\frac{\partial g}{\partial x} = (x+y)^{y-1} y, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = (x+y)^y \left[\log(x + y) + \frac{y}{x + y}\right].$$

4) a) Trovare tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} y'' + y = -\cos x \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

b) Risolvere

1) $\begin{cases} y' = (x+2)(y^2+1)\operatorname{arctg} y \\ y(0) = 0, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y' = (x+2)(y^2+1)\operatorname{arctg} y \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Sol.

a) $$y(x) = c\sin x - \frac{1}{2}x\sin x, \quad c \in \mathbf{R}$$

b) 1) $y = 0$, 2) $y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\, e^{\frac{x^2}{2}+2x}\right)$.

MATEMATICA 3
Ingegneria Civile e Ambientale
Prof E. Gonzalez e Prof. C. Sartori
Primo compitino

TEMA C Padova 24/3/2004

1) Determinare il piano tangente e la retta normale
a) al grafico di $z = \mathrm{e}^{x^2 y} - 2x^{10} + xy$ per il punto $(1, 0, -1)$;
b) alla superficie definita da

$$\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} + x^2 y^3 z^4 - 4 = 0$$

per il punto $(1, 1, 1)$.

Sol.

a) $z = -1-20(x-1)+2y;$ $(x, y, z) = (1, 0, -1)+\lambda(-20, 2, -1),\ \lambda \in \mathbf{R}.$

b) $3(x-1)+4(y-1)+5(z-1) = 0;$ $(x, y, z) = (1, 1, 1)+\lambda(3, 4, 5),\ \lambda \in \mathbf{R}.$

2) Calcolare $y'(-1)$, $y''(-1)$, dove $y = y(x)$ è definita implicitamente da

$$x^5 - y^5 + x^2 - 2y = 0$$

nell'intorno di $(-1, 0)$.

Sol.

$$y'(-1) = 3/2,\ \ y''(-1) = -9.$$

3) a) Calcolare $\mathrm{grad} f(x_0, y_0)$, sapendo che f è differenziabile e che

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{82}},\frac{9}{\sqrt{82}}\right)} f(x_0, y_0) = \sqrt{82}\ , \qquad D_{\left(-\frac{9}{\sqrt{82}},\frac{1}{\sqrt{82}}\right)} f(x_0, y_0) = \sqrt{82}.$$

b) Posto $g(x, y) = (xy)^y$, $x > 0$, $y > 0$, calcolare $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$.

Sol.

a) $$\mathrm{grad} f(x_0, y_0) = (-8, 10).$$

b) $$\frac{\partial g}{\partial x} = x^{y-1} y^{y+1}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = (xy)^y [1+\log(xy)].$$

4) a) Trovare tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(2x) \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) = -\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

b) Risolvere

$$1) \begin{cases} y' = (\operatorname{tg} y)\ (\operatorname{tg} x) \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} y' = (\operatorname{tg} y)\ (\operatorname{tg} x) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Sol.

a)
$$y(x) = c\sin(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x), \quad c \in \mathbf{R}$$

b)
$$1) \quad y = 0, \qquad 2) \quad y(x) = \arcsin\left(\frac{\sin 1}{\cos x}\right).$$

MATEMATICA 3
Ingegneria Civile e Ambientale
Prof E. Gonzalez e Prof. C. Sartori
Primo compitino

TEMA D Padova 24/3/2004

1) Determinare il piano tangente e la retta normale
a) al grafico di $z = xy^3 + x^3y - \sqrt{x^2 + y^2}$ per il punto $(1, 0, -1)$;
b) alla superficie definita da

$$\frac{x + y^2 + z^3}{\sqrt{x^3 + y^2 + z}} - 1 = 0$$

per il punto $(0, 0, 1)$.

Sol.

a) $z = -1 - (x - 1) + y$; $(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(-1, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

b) $x + \frac{5}{2}(z - 1) = 0$; $(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda \left(1, 0, \frac{5}{2}\right)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

2) Calcolare $y'(-2)$, $y''(-2)$, dove $y = y(x)$ è definita implicitamente da

$$\frac{x^4}{4} - y^4 - \frac{x^3}{4} + y - 6 = 0$$

nell'intorno di $(-2, 0)$.

Sol.

$$y'(-2) = 11, \;\; y''(-2) = -15.$$

3) a) Calcolare $\mathrm{grad} f(x_0, y_0)$, sapendo che f è differenziabile e che

$$D_{\left(\frac{4}{\sqrt{52}}, \frac{6}{\sqrt{52}}\right)} f(x_0, y_0) = \sqrt{52}\;, \qquad D_{\left(-\frac{6}{\sqrt{52}}, \frac{4}{\sqrt{52}}\right)} f(x_0, y_0) = \sqrt{52}$$

b) Posto $g(x, y) = x^{x+y}$, $x > 0$, calcolare $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$.

Sol.

a) $$\mathrm{grad} f(x_0, y_0) = (-2, 10).$$

b) $$\frac{\partial g}{\partial x} = x^{x+y} \left(\frac{y + x}{x} + \log x\right), \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = x^{x+y} \log x.$$

4) a) Trovare tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} y'' + 4y = -\cos(2x) \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

b) Risolvere

$$1) \begin{cases} y' = \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} \\ y(1) = 0, \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} y' = \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Sol.

a) $$y(x) = c\sin(2x) - \frac{1}{4}x\sin(2x), \quad c \in \mathbf{R}$$

b) $$1) \quad y = 0, \qquad 2) \quad y(x) = x.$$