

MATEMATICA 3
Ingegneria Civile e Ambientale
Prof E. Gonzalez e Prof. C. Sartori
Secondo compitino

SOLUZIONI

TEMA A

Padova 19/4/2004

1) Calcolare il massimo e minimo assoluti in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ di

$$G(x, y) = \frac{4x^2 + 20xy + 25y^2}{x^2 + y^2}.$$

Sol. a)

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 10 \\ 10 & 25 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 29\lambda = (\lambda - 29)\lambda,$$

min = 0 raggiunto sulla retta $y = -\frac{2}{5}x$
max = 29 raggiunto sulla retta $y = \frac{5}{2}x$.

2) Un poliedro P ha base rettangolare con vertici nei punti

$$(0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 0).$$

Gli altri quattro vertici si trovano nei punti

$$(0, 0, 3), (2, 0, 5), (0, 1, 5), (2, 1, 7).$$

Calcolare il volume di P .

Sol. Il piano per $(0, 0, 3), (2, 0, 5), (0, 1, 5), (2, 1, 7)$ è $z = x + 2y + 3$. Perciò

$$\text{Vol}P = \int_0^2 dx \int_0^1 (x + 2y + 3) dy = 10.$$

3) a) Calcolare

$$\int_{\gamma} y^2 dx + x dy,$$

dove γ è il segmento che va da $(0, 1)$ a $(2, 0)$.

b) Trovare (se esiste) una primitiva della forma differenziale

$$(3x^2 + 6xy) dx + (3x^2 - 3y^2) dy.$$

c) Calcolare

$$\int_{\gamma} (3x^2 + 6xy) dx + (3x^2 - 3y^2) dy,$$

dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\cos^2 t, \cos t + \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Sol. a) $\gamma(t) = (t, 1 - \frac{1}{2}t), 0 \leq t \leq 2,$

$$\int_{\gamma} y^2 dx + x dy = \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}t\right)^2 - \frac{1}{2}t dt = -\frac{1}{3}.$$

b) $U(x, y) = x^3 + 3x^2y - y^3.$

c) L'integrale richiesto vale

$$U(0, 1) - U(1, 1) = -1 - (1 + 3 - 1) = -4.$$

4) a) Calcolare il volume del solido E che si ottiene ruotando attorno all'asse z la regione di piano

$$D = \{(x, z) : 0 \leq x \leq \sqrt{16 - 4z^2}, -2 \leq z \leq 2\}.$$

b) Dato il campo

$$V(x, y, z) = (xe^z, (2 - y)e^z, x^3 + y^2 + 10z),$$

calcolare il flusso uscente di V attraverso la superficie Σ , frontiera di E .

Sol.a)

$$\text{Vol}E = \frac{4}{3}\pi 32 = \frac{128}{3}\pi.$$

b)

$$\text{Flusso} = \int_E \text{div}V dx dy dz = 10\text{Vol}E = \frac{1280}{3}\pi.$$

MATEMATICA 3
Ingegneria Civile e Ambientale
Prof E. Gonzalez e Prof. C. Sartori
Secondo compitino

TEMA B

Padova 19/4/2004

1) Calcolare il massimo e minimo assoluti in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ di

$$G(x, y) = \frac{49x^2 - 14xy + y^2}{x^2 + y^2}.$$

Sol. a)

$$\det \begin{pmatrix} 49 - \lambda & -7 \\ -7 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 50\lambda = (\lambda - 50)\lambda,$$

min = 0 raggiunto sulla retta $y = 7x$

max = 50 raggiunto sulla retta $y = -\frac{1}{7}x$.

2) Un poliedro P ha base rettangolare con vertici nei punti

$$(0, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 1, 0), (3, 1, 0).$$

Gli altri quattro vertici si trovano nei punti

$$(0, 0, 10), (3, 0, 13), (0, 1, 8), (3, 1, 11).$$

Calcolare il volume di P .

Sol. Il piano per $(0, 0, 10), (3, 0, 13), (0, 1, 8), (3, 1, 11)$ è $z = x - 2y + 10$.

Perciò

$$\text{Vol}P = \int_0^3 dx \int_0^1 (x - 2y + 10) dy = \frac{63}{2}.$$

3) a) Calcolare

$$\int_{\gamma} y dx + x^2 dy,$$

dove γ è il segmento che va da $(0, 1)$ a $(2, 0)$.

b) Trovare (se esiste) una primitiva della forma differenziale

$$(xy^2 + 2x^2) dx + (x^2y - y^2) dy.$$

c) Calcolare

$$\int_{\gamma} (xy^2 + 2x^2) dx + (x^2y - y^2) dy,$$

dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Sol. a) $\gamma(t) = (t, 1 - \frac{1}{2}t), 0 \leq t \leq 2,$

$$\int_{\gamma} y \, dx + x^2 \, dy = \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{2}t^2 \, dt = -\frac{1}{3}.$$

b) $U(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3.$

c) L'integrale richiesto vale

$$U(0, 1) - U(2, 1) = -1/3 - \left(2 + \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{22}{3}.$$

4) a) Calcolare il volume del solido E che si ottiene ruotando attorno all'asse z la regione di piano

$$D = \{(x, z) : 0 \leq x \leq \frac{1}{7}\sqrt{1 - z^2}, -1 \leq z \leq 1\}.$$

b) Dato il campo

$$V(x, y, z) = (z \cos x, yz \sin x, 5z + 5),$$

calcolare il flusso uscente di V attraverso la superficie Σ , frontiera di E .

Sol.a)

$$\text{Vol}E = \frac{4}{3}\pi \frac{1}{49} = \frac{4}{147}\pi.$$

b)

$$\text{Flusso} = \int_E \text{div}V \, dx \, dy \, dz = 5\text{Vol}E = \frac{20}{147}\pi.$$

MATEMATICA 3
Ingegneria Civile e Ambientale
Prof E. Gonzalez e Prof. C. Sartori
Secondo compitino

TEMA C

Padova 19/4/2004

1) Calcolare il massimo e minimo assoluti in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ di

$$G(x, y) = \frac{9x^2 + 24xy + 16y^2}{x^2 + y^2}.$$

Sol. a)

$$\det \begin{pmatrix} 9 - \lambda & 12 \\ 12 & 16 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda = (\lambda - 25)\lambda,$$

min = 0 raggiunto sulla retta $y = -\frac{3}{4}x$
max = 25 raggiunto sulla retta $y = \frac{4}{3}x$.

2) Un poliedro P ha base rettangolare con vertici nei punti

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 5, 0), (1, 5, 0).$$

Gli altri quattro vertici si trovano nei punti

$$(0, 0, 1), (1, 0, 6), (0, 5, 6), (1, 5, 11).$$

Calcolare il volume di P .

Sol. Il piano per $(0, 0, 1), (1, 0, 6), (0, 5, 6), (1, 5, 11)$ è $z = 5x + y + 1$. Perciò

$$\text{Vol}P = \int_0^1 dx \int_0^5 (5x + y + 1) dy = 30.$$

3) a) Calcolare

$$\int_{\gamma} y^2 dx + x dy,$$

dove γ è il segmento che va da $(-1, 0)$ a $(0, 3)$.

b) Trovare (se esiste) una primitiva della forma differenziale

$$(3y^2 + 6x^2) dx + (6xy - 3y^2) dy.$$

c) Calcolare

$$\int_{\gamma} (3y^2 + 6x^2) dx + (6xy - 3y^2) dy,$$

dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (2 \cos t - \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Sol. a) $\gamma(t) = (-1 + t, 3t), 0 \leq t \leq 1,$

$$\int_{\gamma} y^2 dx + x dy = \int_0^1 (9t^2 - 3 + 3t) dt = \frac{3}{2}.$$

b) $U(x, y) = 3xy^2 + 2x^3 - y^3.$

c) L'integrale richiesto vale

$$U(1, 2) - U(1, 0) = 12 + 2 - 8 - 2 = 4.$$

4) a) Calcolare il volume del solido E che si ottiene ruotando attorno all'asse z la regione di piano

$$D = \{(x, z) : 0 \leq x \leq 3\sqrt{4 - z^2}, -2 \leq z \leq 2\}.$$

b) Dato il campo

$$V(x, y, z) = (x^3 y^2 z, xy^3 z^2 - x^2 y^3 z, 7z - xy^2 z^3),$$

calcolare il flusso uscente di V attraverso la superficie Σ , frontiera di E .

Sol.a)

$$\text{Vol}E = \frac{4}{3}\pi 8 \cdot 9 = 96\pi.$$

b)

$$\text{Flusso} = \int_E \text{div}V dx dy dz = 7\text{Vol}E = 672\pi.$$

MATEMATICA 3
Ingegneria Civile e Ambientale
Prof E. Gonzalez e Prof. C. Sartori
Secondo compitino

TEMA D

Padova 19/4/2004

1) Calcolare il massimo e minimo assoluti in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ di

$$G(x, y) = \frac{100x^2 - 100xy + 25y^2}{x^2 + y^2}.$$

Sol. a)

$$\det \begin{pmatrix} 100 - \lambda & -50 \\ -50 & 25 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 125\lambda = (\lambda - 125)\lambda,$$

min = 0 raggiunto sulla retta $y = 2x$

max = 125 raggiunto sulla retta $y = -\frac{1}{2}x$.

2) Un poliedro P ha base rettangolare con vertici nei punti

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 4, 0), (1, 4, 0).$$

Gli altri quattro vertici si trovano nei punti

$$(0, 0, 1), (1, 0, 4), (0, 4, 5), (1, 4, 8).$$

Calcolare il volume di P .

Sol. Il piano per $(0, 0, 1), (1, 0, 4), (0, 4, 5), (1, 4, 8)$ è $z = 3x + y + 1$. Perciò

$$\text{Vol}P = \int_0^1 dx \int_0^4 (3x + y + 1) dy = 18.$$

3) a) Calcolare

$$\int_{\gamma} y dx + x^2 dy,$$

dove γ è il segmento che va da $(-1, 0)$ a $(0, 3)$.

b) Trovare (se esiste) una primitiva della forma differenziale

$$(2x^2 + 4xy) dx + (2x^2 + y^2) dy.$$

c) Calcolare

$$\int_{\gamma} (2x^2 + 4xy) dx + (2x^2 + y^2) dy,$$

dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = \left(\cos t, \frac{\sin^2 t}{2 + \sin t} \right)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Sol. a) $\gamma(t) = (-1 + t, 3t), 0 \leq t \leq 1,$

$$\int_{\gamma} y \, dx + x^2 \, dy = \int_0^1 (3t + 3(t-1)^2) \, dt = \frac{5}{2}.$$

b) $U(x, y) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2y + \frac{1}{3}y^3.$

c) L'integrale richiesto vale

$$U(-1, 0) - U(1, 0) = -\frac{4}{3}.$$

4) a) Calcolare il volume del solido E che si ottiene ruotando attorno all'asse z la regione di piano

$$D = \{(x, z) : 0 \leq x \leq 5\sqrt{9 - z^2}, -3 \leq z \leq 3\}.$$

b) Dato il campo

$$V(x, y, z) = \left(13x - 1, z \cos y, \frac{z^2}{2} \sin y \right),$$

calcolare il flusso uscente di V attraverso la superficie Σ , frontiera di E .

Sol.a)

$$\text{Vol}E = \frac{4}{3}\pi 5^2 \cdot 3^3 = 900\pi.$$

b)

$$\text{Flusso} = \int_E \text{div}V \, dx \, dy \, dz = 13\text{Vol}E = 11700\pi.$$