MATEMATICA 3
Ingegneria Civile e Ambientale
Prof E. Gonzalez e Prof. C. Sartori
SOLUZIONI

TEMA A Padova 28/4/2004

1) Sia $z(x,y)$ la funzione implicitamente definita da

$$z^3 + zx^2 + 2y = 0$$

in un intorno di $P(0,4,-2)$.
a) Determinare z_x, z_y in un intorno di P.
b) Determinare la direzione di massima crescita di $z(x,y)$ in P.
c) Determinare il Laplaciano $\Delta z = z_{xx} + z_{yy}$ in P.

Sol. a)

$$z_x = -\frac{2xz}{3z^2+x^2}, \qquad z_y = -\frac{2}{3z^2+x^2}.$$

b) $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$.
c)

$$z_{xx}(P) = \frac{1}{3}, \quad z_{yy}(P) = \frac{1}{36}, \quad \Delta z(P) = \frac{13}{36}.$$

2) Determinare massimi e minimi assoluti di $f(x,y) = e^{x^2-2y^2}$ su

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 + 10y^2 \le 7\}.$$

Sol. $f_x = 2xe^{x^2-2y^2}$, $f_y = -4ye^{x^2-2y^2}$. Unico punto critico è $(0,0)$.

$$\det H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -8$$

quindi $(0,0)$ è un punto di sella.
$f_{|\text{bordo}} = e^{7-2y^2}$, $\quad -\sqrt{\frac{7}{10}} \le y \le \sqrt{\frac{7}{10}}$.
$\max f = e^7 \quad$ in $\quad (\sqrt{7},0)$, $(-\sqrt{7},0)$
$\min f = e^{-\frac{7}{5}} \quad$ in $\quad \left(0,\sqrt{\frac{7}{10}}\right)$, $\left(0,-\sqrt{\frac{7}{10}}\right)$.

3) Calcolare

$$\int_D y\,dx\,dy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ 0 \le \rho \le \cos\theta, \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$.

Sol.

$$\int_D y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta} \rho^2 \sin\theta\,d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\theta}{3} \sin\theta\,d\theta = -\frac{\cos^4\theta}{12}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{12}$$

4) Calcolare l'area della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1/2\}$.

Sol. $\Sigma = \left\{(x, y, z) :\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq \frac{1}{2}\right\} =$
$= \left\{(x, y, z) :\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{3}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\},$
$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$
Area $= \int_\Sigma d\sigma = \int_{\substack{\frac{3}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \rho \leq 1} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho =$
$-\frac{\pi}{2}\sqrt{1-\rho^2}\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} = \frac{\pi}{4}.$

5) a) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4y = \mathrm{e}^{\alpha t}.$$

b) Determinare il polinomio di Taylor di terzo grado della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{arctg} y + x^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Sol. a)

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{2t} + c^2\mathrm{e}^{-2t} + \eta(t).$$

$$\eta(t) = \frac{1}{\alpha^2 - 4}\mathrm{e}^{\alpha t}, \quad \mathrm{se}\,\alpha \neq 2$$

$$\eta(t) = \frac{1}{4}t\mathrm{e}^{2t} \quad \mathrm{se}\,\alpha = 2.$$

b)

$$P(x) = \frac{x^3}{3}.$$

MATEMATICA 3

Ingegneria Civile e Ambientale

Prof E. Gonzalez e Prof. C. Sartori

TEMA B — Padova 28/4/2004

1) Sia $z(x,y)$ la funzione implicitamente definita da

$$z^3 + zy^2 + 4xy = 0$$

in un intorno di $P(1/2, 1, -1)$.

a) Determinare z_x, z_y in un intorno di P.

b) Determinare la direzione di massima crescita di $z(x,y)$ in P.

c) Determinare il Laplaciano $\Delta z = z_{xx} + z_{yy}$ in P.

Sol. a)

$$z_x = -\frac{4y}{3z^2 + y^2}, \qquad z_y = -\frac{2zy + 4x}{3z^2 + y^2}.$$

b) $(-1, 0)$.

c)

$$z_{xx}(P) = \frac{3}{2}, \quad z_{yy}(P) = \frac{1}{2}, \quad \Delta z(P) = 2.$$

2) Determinare massimi e minimi assoluti di $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2 - 2y^2}$ su

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \; : \; x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

Sol. Unico punto critico è $(0,0)$ che è un punto di sella.

$\max f = \mathrm{e}^4 \quad$ in $\quad (-2,0)\,(2,0)$

$\min f = \mathrm{e}^{-2} \quad$ in $\quad (0,-1), (0,1)$.

3) Calcolare

$$\int_D \sqrt{x^2 + y^2}\; dx\, dy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \; 0 \leq \rho \leq 1 + \theta, \; 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

Sol.

$$\int_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_0^\pi \left(\int_0^{1+\theta} \rho^2\, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \frac{(1+\theta)^3}{3}\, d\theta = \frac{(1+\theta)^4}{12}\bigg]_0^\pi = \frac{(1+\pi)^4 - 1}{12}$$

4) Calcolare l'area della superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 1, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 1/2\}$.

Sol. $\Sigma = \left\{(x,y,z) :\ z = \sqrt{1-x^2-y^2} :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq \frac{1}{2}\right\} =$
$= \left\{(x,y,z) :\ z = \sqrt{1-x^2-y^2} :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{3}{4} \geq x^2+y^2\right\}$,
$d\sigma = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Area $= \int_\Sigma d\sigma = \int_{\substack{\frac{3}{4} \geq x^2+y^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2} \geq \rho} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho =$

$-\frac{\pi}{2}\sqrt{1-\rho^2}\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

5) a) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 9y = \mathrm{e}^{\alpha t}.$$

b) Determinare il polinomio di Taylor di terzo grado della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \mathrm{tg} y + 3x^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Sol. a)

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{-3t} + \eta(t).$$

$$\eta(t) = \frac{1}{\alpha^2-9}\mathrm{e}^{\alpha t}, \quad \mathrm{se}\, \alpha \neq 3$$

$$\eta(t) = \frac{1}{6}t\mathrm{e}^{3t} \quad \mathrm{se}\, \alpha = 3.$$

b)

$$P(x) = x^3.$$

MATEMATICA 3
Ingegneria Civile e Ambientale
Prof E. Gonzalez e Prof. C. Sartori

TEMA C Padova 28/4/2004

1) Sia $z(x, y)$ la funzione implicitamente definita da

$$4z^3 + z^2y - 2x^2y = 0$$

in un intorno di $P(0, 4, -1)$.
a) Determinare z_x, z_y in un intorno di P.
b) Determinare la direzione di massima crescita di $z(x, y)$ in P.
c) Determinare il Laplaciano $\Delta z = z_{xx} + z_{yy}$ in P.

Sol. a)

$$z_x = \frac{2xy}{6z^2 + zy}, \qquad z_y = -\frac{2x^2 - z^2}{12z^2 + 2zy}.$$

b) $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.
c)

$$z_{xx}(P) = 4, \quad z_{yy}(P) = 0, \quad \Delta z(P) = 4.$$

2) Determinare massimi e minimi assoluti di $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2 - 2y^2}$ su

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \; : \; 3x^2 + y^2 \leq 10\}.$$

Sol. Unico punto critico è $(0, 0)$ che è un punto di sella.
$\max f = \mathrm{e}^{\frac{10}{3}}$ in $\left(-\sqrt{\frac{10}{3}}, 0\right) \left(\sqrt{\frac{10}{3}}, 0\right)$

$\min f = \mathrm{e}^{-20}$ in $(0, -\sqrt{10}), (0, \sqrt{10})$.

3) Calcolare

$$\int_D xy \, dx \, dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \; 0 \leq \rho \leq \sin\theta, \; 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

Sol.

$$\int_D xy \, dx \, dy = \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin\theta} \rho^3 \cos\theta \sin\theta \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin^5\theta}{4} \cos\theta \, d\theta = \frac{\sin^6\theta}{24} \Big]_0^\pi = 0$$

4) Calcolare l'area della superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 1,\ y \geq 0,\ z \geq 1/3\}$.

Sol. $\Sigma = \left\{(x,y,z) : \ z = \sqrt{1-x^2-y^2} : \ y \geq 0,\ z \geq \frac{1}{3}\right\} =$
$= \left\{(x,y,z) : \ z = \sqrt{1-x^2-y^2} : \ y \geq 0,\ \frac{8}{9} \geq x^2+y^2\right\}$,
$d\sigma = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Area $= \int_\Sigma d\sigma = \int_{\substack{\frac{8}{9} \geq x^2+y^2 \\ y \geq 0}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy = \pi \int_{\frac{2\sqrt{2}}{3} \geq \rho} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho =$
$-\pi\sqrt{1-\rho^2}\Big]_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{2\pi}{3}$.

5) a) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - \alpha^2 y = \mathrm{e}^{2t}.$$

b) Determinare il polinomio di Taylor di terzo grado della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(1+y^2) + 4x^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Sol. a)

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{\alpha t} + c^2 \mathrm{e}^{-\alpha t} + \eta(t).$$

$$\eta(t) = \frac{1}{4-\alpha^2}\mathrm{e}^{2t}, \quad \mathrm{se}\, \alpha \neq 2$$

$$\eta(t) = \frac{1}{4}t\mathrm{e}^{2t} \quad \mathrm{se}\, \alpha = 2.$$

b)

$$P(x) = \frac{4x^3}{3}.$$

MATEMATICA 3
Ingegneria Civile e Ambientale
Prof E. Gonzalez e Prof. C. Sartori

TEMA D — Padova 28/4/2004

1) Sia $z(x, y)$ la funzione implicitamente definita da

$$-4z^3 + zx^2 - xy^2 = 0$$

in un intorno di $P(2, 0, 1)$.
a) Determinare z_x, z_y in un intorno di P.
b) Determinare la direzione di massima crescita di $z(x, y)$ in P.
c) Determinare il Laplaciano $\Delta z = z_{xx} + z_{yy}$ in P.

Sol. a)

$$z_x = \frac{y^2 - 2xz}{x^2 - 12z^2}, \qquad z_y = \frac{2xy}{x^2 - 12z^2}.$$

b) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
c)

$$z_{xx}(P) = 0, \quad z_{yy}(P) = -\frac{1}{2}, \quad \Delta z(P) = -\frac{1}{2}.$$

2) Determinare massimi e minimi assoluti di $f(x, y) = e^{x^2 - 2y^2}$ su

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; 5x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Sol. Unico punto critico è $(0, 0)$ che è un punto di sella.
$\max f = e^{\frac{3}{5}}$ in $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$
$\min f = e^{-6}$ in $(0, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$.

3) Calcolare

$$\int_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \; 0 \leq \rho \leq \theta^2, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Sol.

$$\int_D x^2 + y^2\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\theta^2} \rho^3\, d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\theta^8}{4}\, d\theta = \frac{\theta^9}{36}\Big]_0^{2\pi} = \frac{128}{9}\pi^9$$

4) Calcolare l'area della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, x \geq 0,\, 0 \leq z \leq 1/3\}$.

Sol. $\Sigma = \left\{(x, y, z) : \, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} : \; x \geq 0,\, 0 \leq z \leq \frac{1}{3}\right\} =$
$= \left\{(x, y, z) : \, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} : \; x \geq 0,\; \frac{8}{9} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$,
$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.
Area $= \int_\Sigma d\sigma = \int_{\substack{\frac{8}{9} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy = \pi \int_{\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq \rho \leq 1} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho =$
$-\pi \sqrt{1 - \rho^2}\Big]_{\frac{2\sqrt{2}}{3}}^{0} = \frac{\pi}{3}$.

5) a) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - \alpha^2 y = \mathrm{e}^{3t}.$$

b) Determinare il polinomio di Taylor di terzo grado della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin y + 12x^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Sol. a)

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{\alpha t} + c^2 \mathrm{e}^{-\alpha t} + \eta(t).$$

$$\eta(t) = \frac{1}{9 - \alpha^2} \mathrm{e}^{2t}, \quad \text{se}\, \alpha \neq 3$$

$$\eta(t) = \frac{1}{6} t \mathrm{e}^{3t} \quad \text{se}\, \alpha = 3.$$

b)

$$P(x) = 4x^3.$$