MATEMATICA 3
Ingegneria Civile e Ambientale
Prof E. Gonzalez e Prof. C. Sartori

TEMA A Padova 7/11/2004

SOLUZIONI

1) a) Determinare il volume della parte del cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$ che è sottesa dal piano $z = y$.
b) Calcolare l'area della sezione individuata dal cilindro C sul piano $z = y$

Sol. a) Si ha

$$\text{Volume} = \int_{x^2+y^2\leq 1, y\geq 0} y\,dx\,dy = \int_{\rho\leq 1, 0\leq\theta\leq\pi} \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{2}{3}.$$

b)

$$\text{Area} = \int_{x^2+y^2\leq 1, y\geq 0} \sqrt{2}\,dx\,dy = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) Determinare massimo e minimo assoluti di $f(x, y) = e^{x-y}$ su $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 + 10y^2 \leq 7\}$.

Sol. Si trova Max $f = e^{\sqrt{\frac{77}{10}}}$, min $f = e^{-\sqrt{\frac{77}{10}}}$.

3) a) Trovare tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} y'' + y = -\cos x \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

b) Risolvere

$$1) \begin{cases} y' = (x + 2)(y^2 + 1) \operatorname{arctg} y \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} y' = (x + 2)(y^2 + 1) \operatorname{arctg} y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Sol a) Si ha $y(x) = A \sin x - \frac{1}{2} x \sin x$.

b) 1) y=0
2) $\operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{4} e^{\frac{x^2}{2}+2x}$.

4) Posto $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 2 della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente dall'equazione $f(x, y) = 0$ in un intorno di $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Sol. $P(x) = \frac{3}{2} - (x - \frac{3}{2}) - \frac{16}{3}(x - \frac{3}{2})^2$.

5) Data la funzione $f(x, y) = y^3\sqrt{2 + x^2}$, determinare
a) la derivata direzionale nel punto $(1, 2)$, indicando in quali direzioni essa è massima, minima e nulla.
b) l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P.

Sol. a) $V_{\max} = \frac{1}{\sqrt{85}}(2, 9)$, $V_{\min} = -V_{\max}$, $V_{\text{nulla}} = \pm\frac{1}{\sqrt{85}}(9, -2)$.
b) $z = 8\sqrt{3} + \frac{8}{\sqrt{3}}(x - 1) + 12\sqrt{3}(y - 2)$.