Matematica 3 – 17 Settembre 2004
Corsi di Laurea in Ingegneria Civile,
Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio e Ingegneria Edile

SOLUZIONI

Tema 1

1. Risolvere, al variare di $p \in \mathbb{R}$, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (x-1)y' = y+1 \\ y(0) = p. \end{cases}$$

Sol. Se $p = -1$ allora $y = -1$.
Se $p \neq -1$ allora $y = -1 \pm |p+1|(x-1)$.

2. Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2)$$

sul triangolo di vertici $A = (0,-1)$, $B = (2,0)$, $C = (0,1)$.

Sol. $\min f = f(0,0) = 0$, $\max f = f(2,0) = \log 5$

3. Sia S il solido generato dalla rotazione del dominio

$$D = \{(0,y,z) : \ y < 1, (y-1)^2 + z^2 < 1\}$$

attorno all'asse z. Si chiede di

a) calcolare il volume di S;

b) calcolare il flusso del campo vettoriale

$$G(x,y,z) = \left(\frac{x^2z^2}{2} - z\cos(xy) + 2x,\ 3y - xyz^2,\ 5z - \frac{1}{2}z^2 y \sin(xy)\right)$$

attraverso il bordo dell'insieme S orientato secondo la normale esterna.

Sol. a)

$$\mathrm{Vol}S = 2\pi \int_D y\, dy\ dz = \pi^2 - \frac{4}{3}\pi.$$

b)

$$\text{Flusso} = \int_S \operatorname{div} G\, dx\, dy\, dz = 10\mathrm{Vol}S = 10(\pi^2 - \frac{4}{3}\pi).$$

4. Calcolare

$$\int_\gamma y\, dx + z\, dy + x\, dz,$$

dove γ è la curva intersezione delle superfici $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$, percorsa in senso antiorario.

Sol.

$$\int_\gamma y\, dx + z\, dy + x\, dz = -\pi.$$