Matematica 3, a.a. 2001/02, SOLUZIONI 1^o **compitino**

Corso di laurea in Ingegneria Meccanica, 2^a *Squadra*

Padova 20/3/2003

TEMA 1

Nel caso di scelta multipla, apporre una crocetta a fianco di una **sola** delle possibili risposte.

1. Sia $h(x, y) = g(2x - 3y)$ con $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. Scrivere il gradiente di h in $(2, -1)$.

☐ $g'(7)(2, -3)$.

2. Si consideri la funzione $f(x, y) = 4 + x^2 + 3xy$. La massima derivata direzionale di f in $(1, 1)$ vale

☐ 1
☐ $(5, 3)$
$\surd$ $\sqrt{34}$

3. Data l'equazione $y^3 + xy - 8 = 0$ la derivata della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente da $f(x, y) = 0$ nell'intorno di $(0, 2)$ vale in $x = 0$

☐ 0
☐ non esiste
$\surd$ $-\frac{1}{6}$

NOTA BENE Una risposta corretta vale 2 punti,una risposta errata vale -1 punto, una risposta non data vale 0 punti.

Tema 1

1. Esercizio

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin y}{(x^2+y^2)^\alpha} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Dire per quali α la funzione è continua in $(0,0)$.
b) Calcolare le derivate direzionali in $(0,0)$ per $\alpha = 1$ e dire se per tale α è vera la formula del gradiente.

Sol. a) Usando lo sviluppo asintotico di $\sin y$ si ha

$$f(x,y) = \frac{x^2 \sin y}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{x^2(y+o(y))}{(x^2+y^2)^\alpha},$$

per $(x,y) \to (0,0)$. Da cui passando a coordinate polari

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta + o(\rho^3\cos^2\theta\sin\theta)}{\rho^{2\alpha}}.$$

Si vede subito che il limite per $(x,y) \to (0,0)$ è 0 se $3 > 2\alpha$ mentre non esiste se $3 \leq 2\alpha$ e che f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{3}{2}$.
b) Se (u,v) è un versore

$$D_{(u,v)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2u^2\sin(tv)}{t(t^2)} = \lim \frac{t^2u^2(tv+o(tv))}{t^3} = u^2 v.$$

Da qui si deduce subito che non può valere la formula del gradiente perchè dato che $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ dovrebbe essere $D_{(u,v)}f(0,0) = 0$ per ogni (u,v) che contraddice la formula precedente.

2. Esercizio

Si considerino l' insieme $D = \{(x,y) : 2y \leq -2x^2 + x\}$ e la funzione

$$f : D \to \mathbf{R}, \quad f(x,y) = -\cos y - 2x^2 + x.$$

(i) Disegnare sul piano l' insieme D.
(ii) Determinare i punti di minimo e massimo locale di f nell'interno d D ed il corrispondente valore della funzione.
(iii) Sapendo che la funzione f ha un massimo assoluto su D, determinare i candidati punti di massimo assoluto su ∂D ed il valore del massimo.

Sol. (i) Si tratta della parte di piano che sta sotto il grafico della parabola $y = \frac{1}{2}(-2x^2 + x)$.
(ii) Si ha $f_x = -4x + 1$ $f_y = \sin y$. Quindi i punti critici sono $(\frac{1}{4}, K\pi)$ con K numero intero, $K \leq 0$. Si ha $f_{xx} = -4$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = \cos y$. Si trova subito che essendo $\cos(K\pi) = 1$ per K pari e $\cos(K\pi) = -1$ per K dispari allora i punti

$$(\frac{1}{4}, K\pi) \quad \text{sono} \begin{cases} \text{punti di sella per } K \text{ pari} \\ \text{punti di massimo per } K \text{ dispari.} \end{cases}$$

Si ha

$$f(\frac{1}{4}, K\pi) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{8} = -\frac{7}{8} & \text{per} \, K \text{ pari} \\ 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} & \text{per } K \text{ dispari} \end{cases}$$

.
(iii) Sostituendo l' equazione della parabola nella $f(x, y)$ si deve studiare

$$h(x) = -\cos\left(\frac{1}{2}(-2x^2 + x)\right) - 2x^2 + x.$$

Si ha

$$h'(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}(-2x^2 + x)\right)(-4x+1) - 4x+1 = \left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}(-2x^2 + x)\right) + 1\right)(-4x+1),$$

e

$$h'(x) = 0 \quad \text{se e solo se } x = \frac{1}{4}.$$

L'unico punto critico sulla parabola è quidi il suo vertice $V(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$ e il valore della funzione su tale punto è $f(V) = \cos\frac{1}{16} + \frac{1}{8}$.
Quindi i punti di massimo assoluto sono i punti $(\frac{1}{4}, K\pi)$ per K dispari e il massimo assoluto è $\text{Max} f = \frac{9}{8}$.

3. Domanda di teoria.

Si enunci il Teorema del Dini per l'esistenza di una funzione $y = g(x)$ implicitamente definita da $f(x, y) = 0$.

Sol Vedasi il testo

SOLUZIONI TEMA 2

Nel caso di scelta multipla, apporre una crocetta a fianco di una **sola** delle possibili risposte.

1. Data l'equazione $x^3 + xy - 8 = 0$ la derivata della funzione $x = g(y)$ definita implicitamente da $f(x, y) = 0$ nell'intorno di $(2, 0)$ vale in $y = 0$

$\surd$ $-\frac{1}{6}$
☐ non esiste
☐ $-(2, 12)$

3. Sia $h(x, y) = g(2x - 3y^2)$ con $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. Scrivere il gradiente di h in $(-1, 2)$.

☐ $g'(-14)(2, -12)$.

4. Si consideri la funzione $f(x, y) = e^{x^2+3y}$. La massima derivata direzionale di f in $(0, 0)$ vale

$\surd$ 3
☐ $(0, 3)$
☐ 0

NOTA BENE Una risposta corretta vale 2 punti,una risposta errata vale -1 punto, una risposta non data vale 0 punti.

Tema 2

1. Esercizio

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(xy^2)}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Dire per quali α la funzione è continua in $(0,0)$.
b) Calcolare le derivate direzionali in $(0,0)$ per $\alpha = \frac{3}{2}$ e dire se per tale α è vera la formula del gradiente.
Sol. a) Usando lo sviluppo asintotico della funzione $\sin t$ per $t \to 0$ si ha

$$f(x,y) = \frac{x \sin xy^2}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{x(xy^2 + o(xy^2))}{(x^2+y^2)^\alpha},$$

per $(x,y) \to (0,0)$. Da cui passando a coordinate polari

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta + o(\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta)}{\rho^{2\alpha}}.$$

Si vede subito che il limite per $(x,y) \to (0,0)$ è 0 se $4 > 2\alpha$ mentre non esiste se $4 \leq 2\alpha$ e che f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 2$.
b) Se (u,v) è un versore

$$D_{(u,v)}f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{tu\sin(tut^2v^2)}{t(t^3)} = \lim_{t\to 0}\frac{tu(t^3uv^2 + o(t^3uv^2))}{t^4} = u^2v^2.$$

Da qui si deduce subito che non può valere la formula del gradiente per chè dato che $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ dovrebbe essere $D_{(u,v)}f(0,0) = 0$ per ogni (u,v) che contraddice la formula precedente.

2. Esercizio

Si considerino l' insieme $D = \{(x,y) : 2y \leq -x^2 - x\}$ e la funzione

$$f : D \to \mathbf{R}, \quad f(x,y) = -\cos y - x^2 - x.$$

(i) Disegnare sul piano l' insieme D.
(ii) Determinare i punti di minimo e massimo locale di f in D^o ed il corrispondente valore della funzione.
(iii) Sapendo che la funzione f ha un massimo assoluto su D, determinare i candidati punti di massimo assoluto su ∂D ed il valore del massimo.

Sol. (i) Si tratta della parte di piano che sta sotto il grafico della parabola

$y = \frac{1}{2}(-x^2 - x)$.
(ii) Si ha $f_x = -2x - 1$ $f_y = \sin y$. Quindi i punti critici sono $(-\frac{1}{2}, K\pi)$ con K numero intero $K \leq 0$. Si ha $f_{xx} = -2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = \cos y$. Si trova subito che essendo $\cos(K\pi) = 1$ per K pari e $\cos(K\pi) = -1$ per K dispari allora i punti

$$(-\frac{1}{2}, K\pi) \quad \text{sono} \begin{cases} \text{punti di sella per } K \text{ pari} \\ \text{punti di massimo per } K \text{ dispari.} \end{cases}$$

Si ha

$$f(-\frac{1}{2}, K\pi) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} & \text{per } K \text{ pari} \\ 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} & \text{per } K \text{ dispari} \end{cases}$$

.
(iii) Sostituendo l' equazione della parabola nella $f(x, y)$ si deve studiare

$$h(x) = -\cos\left(\frac{1}{2}(-x^2 - x)\right) - x^2 - x.$$

Si ha

$$h'(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}(-x^2 - x)\right)(-2x-1)-2x-1 = \left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}(-x^2 - x)\right) + 1\right)(-2x-1),$$

e

$$h'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

L'unico punto critico sulla parabola è quindi il suo vertice $V(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ e il valore della funzione su tale punto è $f(V) = \cos\frac{1}{8} + \frac{1}{4}$.
Quindi i punti di massimo assoluto sono i punti $(-\frac{1}{2}, K\pi)$ per K dispari e il massimo assoluto è $\mathrm{Max} f = \frac{5}{4}$.

3. Domanda di teoria.

Dimostrare che una funzione differenziabile in un punto è ivi continua.
Sol. Veadasi testo.

SOLUZIONI TEMA 3

Nel caso di scelta multipla, apporre una crocetta a fianco di una **sola** delle possibili risposte.

1. Si consideri la funzione $f(x, y) = \log(y^2 + x)$. La massima derivata direzionale di f in $(1, 1)$ vale

☐ $(\frac{1}{2}, 1)$

$\surd$ $\sqrt{\frac{5}{4}}$

☐ 0

2. Data l'equazione $-y^3 + x^2y + 27 = 0$ la derivata della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente da $f(x, y) = 0$ nell'intorno di $(0, 3)$ vale in $y = 0$

$\surd$ 0

☐ non esiste

☐ $-(0, 27)$

3. Sia $h(x, y) = g(-2x^2 + y)$ con $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. Scrivere il gradiente di h in $(-1, 2)$.

☐ $g'(0)(4, 1)$.

NOTA BENE Una risposta corretta vale 2 punti,una risposta errata vale -1 punto, una risposta non data vale 0 punti.

Tema 3

1. Esercizio

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\log(1+xy)}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Dire per quali α la funzione è continua in $(0,0)$.
b) Calcolare le derivate direzionali in $(0,0)$ per $\alpha = 1$ e dire se per tale α è vera la formula del gradiente.

Sol. a) Usando lo sviluppo asintotico della funzione $\log(1+t)$ per $t \to 0$ si ha

$$f(x,y) = \frac{y\log(1+xy)}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{y(xy + o(xy))}{(x^2+y^2)^\alpha},$$

per $(x,y) \to (0,0)$. Da cui passando a coordinate polari

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta + o(\rho^3\cos\theta\sin^2\theta)}{\rho^{2\alpha}}.$$

Si vede subito che il limite per $(x,y) \to (0,0)$ è 0 se $3 > 2\alpha$ mentre non esiste se $3 \leq 2\alpha$ e che f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{3}{2}$.
b) Se (u,v) è un versore

$$D_{(u,v)}f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{tv\log(1+t^2uv)}{t(t^2)} = \lim_{t\to 0}\frac{tv(t^2uv + o(t^2uv))}{t^3} = uv^2.$$

Da qui si deduce subito che non può valere la formula del gradiente per chè dato che $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ dovrebbe essere $D_{(u,v)}f(0,0) = 0$ per ogni (u,v) che contraddice la formula precedente.

2. Esercizio

Si considerino l' insieme $D = \{(x,y) : 2y \leq x^2 + x\}$ e la funzione

$$f : D \to \mathbf{R}, \quad f(x,y) = -\cos y + x^2 + x.$$

(i) Disegnare sul piano l' insieme D.
(ii) Determinare i punti di minimo e massimo locale di f in D^o ed il corrispondente valore della funzione.
(iii) Sapendo che la funzione f ha un minimo assoluto su D, determinare i candidati punti di minimo assoluto su ∂D ed il valore del minimo.

Sol. (i) Si tratta della parte di piano che sta sopra il grafico della parabola $y = \frac{1}{2}(x^2 + x)$.
(ii) Si ha $f_x = 2x+1$ $f_y = \sin y$. Quindi i punti critici sono $(-\frac{1}{2}, K\pi)$ con K numero intero, $K \geq 0$. Si ha $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = \cos y$. Si trova subito che essendo $\cos(K\pi) = 1$ per K pari e $\cos(K\pi) = -1$ per K dispari allora i punti

$$(-\frac{1}{2}, K\pi) \quad \text{sono} \begin{cases} \text{punti di minimo per } K \text{ pari} \\ \text{punti di sella per } K \text{ dispari.} \end{cases}$$

Si ha

$$f(-\frac{1}{2}, K\pi) = \begin{cases} -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4} & \text{per} \, K \text{ pari} \\ 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} & \text{per } K \text{ dispari} \end{cases}$$

.
(iii) Sostituendo l' equazione della parabola nella $f(x, y)$ si deve studiare

$$h(x) = -\cos\left(\frac{1}{2}(x^2 + x)\right) + x^2 + x.$$

Si ha

$$h'(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}(+x^2 + x)\right)(2x+1)+2x+1 = \left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}(+x^2 + x)\right) + 1\right)(2x+1),$$

e

$$h'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}.$$

L'unico punto critico sulla parabola è quindi il suo vertice $V(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$ e il valore della funzione su tale punto è $f(V) = \cos\frac{1}{8} - \frac{1}{4}$.
Quindi i punti di minimo assoluto sono i punti $(-\frac{1}{2}, K\pi)$ per K pari e il minimo assoluto è $\min f = -\frac{5}{4}$.

3. Domanda di teoria.

Dire per quali funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ vale la formula del gradiente e poi dimostrare tale formula.
Sol. Vedasi il testo.

SOLUZIONI TEMA 4

Nel caso di scelta multipla, apporre una crocetta a fianco di una **sola** delle possibili risposte.

1. Data l'equazione $-x^3 + xy^2 + 27 = 0$ la derivata della funzione $x = g(y)$ definita implicitamente da $f(x, y) = 0$ nell'intorno di $(3, 0)$ vale in $y = 0$

$\surd$ 0
☐ non esiste
☐ $-(27, 0)$

2. Si consideri la funzione $f(x, y) = \sin(2y + x)$. La massima derivata direzionale di f in $(0, \pi)$ vale

☐ $(1, 2)$
$\surd$ $\sqrt{5}$
☐ 0

3. Sia $h(x, y) = g(x^2 - 2y)$ con $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. Scrivere il gradiente di h in $(-1, 2)$.

☐ $g'(-3)(-2, -2)$.

NOTA BENE Una risposta corretta vale 2 punti,una risposta errata vale -1 punto, una risposta non data vale 0 punti.

Tema 4

1. Esercizio

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2\log(1+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Dire per quali α la funzione è continua in $(0,0)$.
b) Calcolare le derivate direzionali in $(0,0)$ per $\alpha=\frac{3}{2}$ e dire se per tale α è vera la formula del gradiente.

Sol. a) Usando lo sviluppo asintotico della funzione $\log(1+t)$ per $t\to 0$ si ha

$$f(x,y)=\frac{x^2\log(1+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha}=\frac{x^2(y^2+o(y^2))}{(x^2+y^2)^\alpha},$$

per $(x,y)\to(0,0)$. Da cui passando a coordinate polari

$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta+o(\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta)}{\rho^{2\alpha}}$$

Si vede subito che il limite per $(x,y)\to(0,0)$ è 0 se $4>2\alpha$ mentre non esiste se $4\leq 2\alpha$ e che f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha<2$.
b) Se (u,v) è un versore

$$D_{(u,v)}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2u^2\log(1+t^2v^2)}{t(t^3)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2u^2(t^2v^2+o(t^2u^2v^2))}{t^4}=u^2v^2.$$

Da qui si deduce subito che non può valere la formula del gradiente per chè dato che $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ dovrebbe essere $D_{(u,v)}f(0,0)=0$ per ogni (u,v) che contraddice la formula precedente.

2. Esercizio

Si considerino l' insieme $D=\{(x,y):2y\geq 2x^2-x\}$ e la funzione

$$f:D\to\mathbf{R},\quad f(x,y)=-\cos y+2x^2-x.$$

(i) Disegnare sul piano l' insieme D.
(ii) Determinare i punti di minimo e massimo locale di f in D^o ed il corrispondente valore della funzione.
(iii) Sapendo che la funzione f ha un minimo assoluto su D, determinare i candidati punti di minimo assoluto su ∂D ed il valore del minimo.

Sol. (i) Si tratta della parte di piano che sta sopra il grafico della parabola $y = \frac{1}{2}(2x^2 - x)$.
(ii) Si ha $f_x = 4x - 1$ $f_y = \sin y$. Quindi i punti critici sono $(\frac{1}{4}, K\pi)$ con K numero intero, $K \geq 0$. Si ha $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = \cos y$. Si trova subito che essendo $\cos(K\pi) = 1$ per K pari e $\cos(K\pi) = -1$ per K dispari allora i punti

$$(\frac{1}{4}, K\pi) \quad \text{sono} \begin{cases} \text{punti di minimo per } K \text{ pari} \\ \text{punti di sella per } K \text{ dispari.} \end{cases}$$

Si ha

$$f(\frac{1}{4}, K\pi) = \begin{cases} -1 - \frac{1}{8} = -\frac{9}{8} & \text{per } K \text{ pari} \\ 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} & \text{per } K \text{ dispari} \end{cases}$$

.
(iii) Sostituendo l' equazione della parabola nella $f(x, y)$ si deve studiare

$$h(x) = -\cos\left(\frac{1}{2}(2x^2 - x)\right) + 2x^2 - x.$$

Si ha

$$h'(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}(2x^2 - x)\right)(4x-1) + 4x - 1 = \left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}(2x^2 - x)\right) + 1\right)(4x-1),$$

e

$$h'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}.$$

L'unico punto critico sulla parabola è quindi il suo vertice $V(\frac{1}{4}, -\frac{1}{16})$ e il valore della funzione su tale punto è $f(V) = \cos\frac{1}{16} - \frac{1}{8}$.
Quindi i punti di minimo assoluto sono i punti $(\frac{1}{4}, K\pi)$ per K pari e il minimo assoluto è $\min f = -\frac{9}{8}$.

3. Domanda di teoria.

Si enunci il Teorema del Dini per l'esistenza di una funzione $x = h(y)$ implicitamente definita da $f(x, y) = 0$.

Sol. Vedasi testo.