Matematica 3, a.a. 2002/03

Corso di laurea in Ingegneria Meccanica, 2^a Squadra

SOLUZIONI

Padova 28/4/2003

Tema A

1) Calcolare

$$\int_D \sqrt{(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

dove $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1,\ x^2+y^2-x \geq 0\}$. Disegnare sul piano cartesiano la regione D.

Sol. D è la regione di piano esterna al cerchio di centro $(\frac{1}{2},0)$ e raggio $\frac{1}{2}$ ma interno al cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1. Passando a coordinate polari è facile vedere che D corrisponde a

$$\Delta = \{(\rho,\theta) : \cos\theta \leq \rho \leq 1,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\} \cup \{(\rho,\theta) : 0 \leq \rho \leq 1, \frac{\pi}{2} \leq \rho \leq \frac{3\pi}{2}\}.$$

Pertanto

$$\int_D \sqrt{(x^2+y^2)}\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta}}{=} \int_\Delta \rho^2\,d\rho\,d\theta =$$

$$\frac{\pi}{3} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\tfrac{1}{3}\rho^3\right]_{\rho=\cos\theta}^{\rho=1} d\theta = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta =$$

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3}\left[\sin\theta - \tfrac{1}{3}\sin^3\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{9}$$

2) Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 y(1-2x)$$

a) determinarne i punti critici e la loro natura.
b) Determinarne massimo e minimo assoluto in

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1,\ x^2 y \leq \frac{1}{4}\}$$

e disegnare sul piano cartesiano la regione D.

Sol. a) I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x = 2xy(1-4x) = 0 \\ f_y = x^2(1-2x) = 0 \end{cases}$$

che sono $(0,y)$ con $y \in \mathbf{R}$ e $\left(\frac{1}{2},0\right)$. Si ha $f_{xx} = 2y - 16xy$, $f_{xy} = 2x(1-4x)$ e $f_{yy} = 0$. Si trova subito che $H\left(\frac{1}{2},0\right) < 0$ e quindi $\left(\frac{1}{2},0\right)$ è un punto di sella mentre $H(0,y) = 0$. Uno studio del segno della funzione mostra che i punti $(0,y)$ sono di minimo per $y > 0$ e di massimo per $y < 0$.
b) Sugli assi la funzione vale 0. Si ha $f(1,y) = -y$, $g(x) = f(x,1) = x^2 - 2x^3$, e $f\left(x, \frac{1}{4x^2}\right) = \frac{1}{4}(1-2x)$; si ha $g'(x) = 0$ se $x = 0$ e $x = \frac{1}{3}$. Quindi si devono confrontare i valori $f\left(\frac{1}{2},1\right) = 0$, $f\left(\frac{1}{3},1\right) = \frac{1}{27}$ =Massimo e $f\left(1,\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ =minimo.

3) Date le due curve cartesiane $y = x$ e $y = x^2$ con $0 \le x \le 1$, determinare l'area della superficie generata dalla loro rotazione attorno all'asse y.
(Sugg. Si applichi il teorema di Guldino per le aree.)

Sol. Dette

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t^2, \quad 0 \le t \le 1 \end{cases} \qquad \gamma_2(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t, \quad 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

per il teorema di Guildino si ha

$$\text{Area } = 2\pi \left(\int_{\gamma_1} x\, ds + \int_{\gamma_2} x\, ds \right) = 2\pi \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\, dt + 2\pi \int_0^1 \sqrt{2} t\, dt =$$

$$2\pi \left[\frac{1}{12}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}} \ + \sqrt{2}\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1) + \pi\sqrt{2}.$$

4) Dato il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{x+y^2}, \frac{2y}{x+y^2} \right)$$

a) dimostrare che è conservativo.
b) Determinarne il lavoro sulla curva $y = \text{arctang} x^2$ per $1 \le x \le \sqrt{2}$.

Sol. a) La parabola $x = -y^2$ divide $\mathbf{R}^2$ in due regioni ognuna delle quali è semplicemente connessa ed è facile vedere che il campo è irrotazionale e pertanto conservativo in entrambe le regioni.
b) Un potenziale è dato da $V(x,y) = \log|x+y^2|$ per $x \ne -y^2$. I punti sulla curva data sono $A\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ e $B(\sqrt{2}, \text{arctang}\, 2)$ ed entrambe appartengono alla regione $\{(x,y) : x > -y^2\}$; pertanto il lavoro è dato da

$$V(B) - V(A) = \log(\sqrt{2} + \text{arctang}^2 2) - \log\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right).$$

5) Enunciare e dimostrare il Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange per l'esistenza di un massimo o minimo di $z = f(x,y)$ vincolato a $\phi(x,y) = 0$.

Sol. Vedasi testo.

Matematica 3, a.a. 2002/03
Corso di laurea in Ingegneria Meccanica, 2^a Squadra
Prof. C. Sartori

Padova 28/4/2003

Tema B

1) Calcolare
$$\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$
dove $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \geq 1,\ x^2+y^2-2x \leq 0\}$. Disegnare sul piano cartesiano la regione D.

Sol. D è la regione di piano interna al cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1 ma esterna al cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1. I due cerchi si intersecano nei punti $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ che corrispondono in coordinate polari rispettivamente ai punti $(\rho,\theta) = \left(1, \frac{\pi}{3}\right)$ e $(\rho,\theta) = \left(1, -\frac{\pi}{3}\right)$. Pertanto D in coordinate polari è dato da
$$\Delta = \left\{(\rho,\theta) : 1 \leq \rho \leq 2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right\}.$$
Quindi
$$\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta}}{=} \int_\Delta \frac{1}{\rho^4}\rho\,d\rho\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[-\frac{1}{2\rho^2}\right]_{\rho=1}^{\rho=2\cos\theta} d\theta =$$
$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1 - \frac{1}{4\cos^2\theta}\right) d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

2) Data la funzione
$$f(x,y) = xy^2(1+2x)$$
a) determinarne i punti critici e la loro natura.
b) Determinarne massimo e minimo assoluto in
$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ xy^2 \leq \frac{1}{4}\}$$
e disegnare sul piano cartesiano la regione D.

Sol. a)I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x = y^2(1+4x) = 0 \\ f_y = 2xy(1+2x) = 0 \end{cases}$$

che sono $(x, 0)$ con $x \in \mathbf{R}$. Si ha $f_{xx} = 4y^2$, $f_{xy} = 2y(1+4x)$ e $f_{yy} = 2x+4x^2$. Si trova subito che $H(x, 0) = 0$. Uno studio del segno della funzione mostra che i punti $(x, 0)$ sono punti di minimo per $x < -\frac{1}{2}$ e $x > 0$, di massimo per $-\frac{1}{2} < x < 0$ e di sella per $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$.
b) Sugli assi la funzione vale 0 ed esso è il minimo assoluto essendo la funzione non negativa in D. Per il massimo si ha $f(1, y) = 3y^2$, $g(x) = f(x, 1) = 2x^2 + x$, e $f\left(\frac{1}{4y^2}, y\right) = \frac{1}{4}(1+2x)$; si ha $g'(x) = 0$ se $x = 0$ e $x = -\frac{1}{4}$. Quindi si devono confrontare i valori $f\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ =Massimo, e $f\left(\frac{1}{4}, 1\right) = \frac{3}{8}$.

3) Date le due curve cartesiane $y = x$ e $y = \sqrt{x}$ con $0 \le x \le 1$ determinare l'area della superficie generata dalla loro rotazione attorno all'asse x. Disegnare sul piano cartesiano la regione D.
(Sugg. Si applichi il teorema di Guldino per le aree.)

Sol. Dette

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t, \quad 0 \le t \le 1 \end{cases} \qquad \gamma_2(t) = \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t}, \quad 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

per il teorema di Guildino si ha

$$\text{Area } = 2\pi\left(\int_{\gamma_1} y\, ds + \int_{\gamma_2} y\, ds\right) = 2\pi\left(\int_0^1 t\sqrt{2}\, dt + \int_0^1 \sqrt{t}\sqrt{1+\frac{1}{4t}}\, dt\right) =$$

$$2\pi\left[\sqrt{2}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{12}(1+4t)^{\frac{3}{2}}\ \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1) + \pi\sqrt{2}.$$

4) Dato il campo

$$F(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2-y}, -\frac{1}{x^2-y}\right)$$

a) dimostrare che è conservativo.
b) Determinarne il lavoro sulla curva $x = -\text{arctang}(y^3)$ per $-\sqrt[3]{2} \le y \le -1$.

a) La parabola $y = x^2$ divide $\mathbf{R}^2$ in due regioni ognuna delle quali è semplicemente connessa ed è facile vedere che il campo è irrotazionale e pertanto conservativo in entrambe le regioni.
b) Un potenziale è dato da $V(x, y) = \log|x^2 - y|$ per $y \neq x^2$. I punti sulla

curva data sono $A\left(\frac{\pi}{4},-1\right)$ e $B(\operatorname{arctang} 2, -\sqrt[3]{2})$ ed entrambe appartengono alla regione $\{(x,y) : y < x^2\}$; pertanto il lavoro è dato da

$$V(A) - V(B) = \log\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right) - \log(\operatorname{arctang}^2 2 - \sqrt{2}).$$

5) Enunciare e dimostrare il teorema che lega la natura della forma quadratica

$$H(h,k) = f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2$$

all'esistenza di un massimo per la funzione $z = f(x,y)$.

Sol. Vedasi testo.

Matematica 3, a.a. 2002/03
Corso di laurea in Ingegneria Meccanica, 2^a Squadra
Prof. C. Sartori

Padova 28/4/2003

Tema C

1) Calcolare
$$\int_D \sqrt{-x^2-y^2+1}\,dx\,dy$$
dove $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1,\ x^2+y^2-y \geq 0\}$. Disegnare sul piano cartesiano la regione D.

Sol. D è la regione di piano esterna al cerchio di centro $(0,\frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{2}$ ma interno al cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1. Passando a coordinate polari è facile vedere che D corrisponde a

$$\Delta = \{(\rho,\theta) : \sin\theta \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi\} \cup \{(\rho,\theta) : 0 \leq \rho \leq 1, \pi \leq \rho \leq 2\pi\}.$$

Pertanto
$$\int_D \sqrt{-x^2-y^2+1}\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta}}{=} \int_\Delta \sqrt{1-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta =$$
$$\int_0^\pi \left[-\tfrac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\rho=\sin\theta}^{\rho=1} d\theta + \int_\pi^{2\pi} \left[-\tfrac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \tfrac{1}{3}\int_0^\pi \cos^3\theta\,d\theta + \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{3}\pi.$$

2) Data la funzione
$$f(x,y) = x^3y(1-2x)$$
a) determinarne i punti critici e la loro natura.
b) Determinarne massimo e minimo assoluto in
$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^3y \leq \frac{1}{8}\}$$
e disegnare sul piano cartesiano la regione D.

Sol. a) I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} f_x = x^2y(3-8x) = 0 \\ f_y = x^3(1-2x) = 0 \end{cases}$$

che sono $(0, y)$ con $y \in \mathbf{R}$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Essendo $f(0, y) = 0$ e $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0$ senza studiare l'Hessiano uno studio del segno della funzione mostra che titti i punti $(0, y)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ sono di sella.
b) Sugli assi la funzione vale 0. Si ha $f(1, y) = -y$, $g(x) = f(x, 1) = x^3 - 2x^4$, e $f\left(x, \frac{1}{8x^3}\right) = \frac{1}{8}(1 - 2x)$; si ha $g'(x) = 0$ se $x = \frac{3}{8}$. Quindi si devono confrontare i valori $f\left(\frac{3}{8}, 1\right)$ =Massimo, $f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 0$ e $f\left(1, \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{8}$ =minimo.

3) Date le due curve cartesiane $y = x^3$ e $y = x$ con $0 \le x \le 1$ determinare l'area della superficie generata dalla loro rotazione attorno all'asse x.
(Sugg. Si applichi il teorema di Guldino per le aree.)

Sol. Dette

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t, \quad 0 \le t \le 1 \end{cases} \qquad \gamma_2(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t^3, \quad 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

per il teorema di Guildino si ha

$$\text{Area } = 2\pi \left(\int_{\gamma_1} y\, ds + \int_{\gamma_2} y\, ds \right) = \int_0^1 t\sqrt{2}\, dt + \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 9t^4}\, dt =$$

$$\sqrt{2}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{54}(1 + 9t^4)^{\frac{3}{2}} \Big]_{t=0}^{t=1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{54}(10\sqrt{10} - 1).$$

4) Dato il campo

$$F(x, y) = \left(\frac{2x}{(x^2 - y)^2}, -\frac{1}{(x^2 - y)^2} \right)$$

a) dimostrare che è conservativo.
b) Determinarne il lavoro sulla curva $x = \sin y$ per $\frac{\pi}{2} \le y \le \pi$.

Sol. a) La parabola $y = x^2$ divide $\mathbf{R}^2$ in due regioni ognuna delle quali è semplicemente connessa ed è facile vedere che il campo è irrotazionale e pertanto conservativo in entrambe le regioni.
b) Un potenziale è dato da $V(x, y) = -\frac{1}{x^2 - y}$ per $y \neq x^2$. I punti sulla curva data sono $A\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ e $B(0, \pi)$ ed entrambe appartengono alla regione $\{(x, y) : y > x^2\}$; pertanto il lavoro è dato da

$$V(B) - V(A) = -\frac{1}{\pi} + \frac{4}{4 - \pi^2}.$$

5) Enunciare e dimostrare il teorema che lega la natura della forma quadratica

$$H(h, k) = f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2$$

all'esistenza di un minimo per la funzione $z = f(x, y)$.

Sol. Vedasi testo.

Matematica 3, a.a. 2002/03
Corso di laurea in Ingegneria Meccanica, 2^a Squadra
Prof. C. Sartori

Padova 28/4/2003

Tema D

1) Calcolare

$$\int_D \sqrt{-x^2-y^2+1}\,dx\,dy$$

dove $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \geq \frac{1}{4},\ x^2+y^2+x \leq 0\}$. Disegnare sul piano cartesiano la regione D.

Sol. D è la regione di piano interna al cerchio di centro $(-\frac{1}{2},0)$ e raggio $\frac{1}{2}$ ma esterna al cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\frac{1}{2}$. I due cerchi si intersecano nei punti $\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ e $\left(-\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ che corrispondono in coordinate polari rispettivamente ai punti $(\rho,\theta) = \left(\frac{1}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$ e $(\rho,\theta) = \left((\frac{1}{2},\frac{4\pi}{3}\right)$. Pertanto D in coordinate polari è dato da

$$\Delta = \left\{(\rho,\theta) : \frac{1}{2} \leq \rho \leq -\cos\theta,\ \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3}\right\}.$$

Quindi

$$\int_D \sqrt{-x^2-y^2+1}\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta}}{=} \int_\Delta \sqrt{1-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left[-\tfrac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\rho=\frac{1}{2}}^{\rho=-\cos\theta} d\theta =$$

$$\tfrac{1}{3}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \sin^3\theta + \left(\tfrac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\ d\theta = \tfrac{2}{9}\pi\left(\tfrac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

2) Data la funzione

$$f(x,y) = xy^3(1+2y)$$

a) determinarne i punti critici e la loro natura.
b) Determinarne massimo e minimo assoluto in

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ xy^3 \leq \frac{1}{8}\}$$

e disegnare sul piano cartesiano la regione D.

Sol. a) I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x = y^3(1+2y) = 0 \\ f_y = xy^2(3+8y) = 0 \end{cases}$$

che sono $(x, 0)$ con $x \in \mathbf{R}$ e $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Essendo la funzione nulla in tutti questi punti uno studio sul suo segno mostra che essi sono tutti di sella.
b) Si ha $f(\frac{1}{8y^3}, y) = \frac{1}{8}(1+2y)$, $f(1, y) = g(y) = y^3 + 2y^4$ e $f(x, 1) = 3x$; $g'(y) = 0$ se $y = 0$ e $y = -\frac{3}{8}$. Essendo la funzione nulla sugli assi si devono confrantare i valori di $f\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$ =Massimo e $f\left(\frac{1}{8}, 1\right) = \frac{1}{4}$ e il minimo è raggiunto sugli assi e vale 0. 3) Date le due curve cartesiane $y = x^3$ e $y = x$ con $0 \le x \le 1$ determinare l'area della superficie generata dalla loro rotazione attorno all'asse x.
(Sugg. Si applichi il teorema di Guldino per le aree.)

Sol. si veda esercizio corrispondente del tema C.

4) Dato il campo

$$F(x, y) = \left(\frac{2x}{(x^2+y)^3}, \frac{1}{(x^2+y)^3}\right)$$

a) dimostrare che è conservativo.
b) Determinarne il lavoro sulla curva $y = \cos x \quad$ per $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Sol. a) La parabola $y = -x^2$ divide $\mathbf{R}^2$ in due regioni ognuna delle quali è semplicemente connessa ed è facile vedere che il campo è irrotazionale e pertanto conservativo in entrambe le regioni.
b) Un potenziale è dato da $V(x, y) = -\frac{1}{2(x^2+y)^2}$ per $y \neq -x^2$. I punti sulla curva data sono $A(0, 1)$ e $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ed entrambe appartengono alla regione $\{(x, y) : y > -x^2\}$; pertanto il lavoro è dato da

$$V(B) - V(A) = \frac{1}{2} - \frac{8}{\pi^4}.$$

5) Enunciare e dimostrare una delle due formule di Green Gauss.
Sol. Vedasi testo.