Matematica 3, a.a. 2002/03
Corso di laurea in Ingegneria Meccanica, 2^a Squadra
Prof. C. Sartori

Padova 19/9/2003

SOLUZIONI Tema A

1) Determinare il baricentro della regione di piano

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \le 0, \, x \ge 0\}.$$

Sol. Detto $B = (x_B, y_B)$ il baricentro, deve essere $y_B = 1$ per la simmetria di D che è un semicerchio con raggio 1 e centro $(0, 1)$ situato sul semipiano $x \ge 0$. Per determinare x_B con il cambio di variabili

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

detto $D' = \{(X, Y) : X^2 + Y^2 \le 1, \, X \ge 0\}$ si ha

$$x_B = \frac{\int_{D'} X \, dX \, dY}{\text{Area} D'} \underset{\substack{X = \rho\cos\theta \\ Y = \rho\sin\theta}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{2}{\pi} \int_{\substack{0 \le \rho \le 1 \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}}} \rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\theta = \frac{4}{3\pi}$$

2) Determinare il lavoro del campo

$$F(x, y) = \left(x e^{-y^2}, -x^2 y e^{-y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

lungo la frontiera del quadrato $Q = \{(x, y) : |x| \le a, |y| \le a\}$, $a > 0$, percorsa in senso orario.

Sol. Detto $G(x, y) = \left(x e^{-y^2}, -x^2 y e^{-y^2} \right)$ e $H(x, y) = \left(0, \frac{1}{x^2+y^2} \right)$ si ha $F = G + H$. Dato che G è conservativo (un suo potenziale è $V(x, y) = \frac{1}{2} x^2 e^{-y^2}$) il suo lavoro lungo la frontiera di Q è nullo e quindi

$$\text{Lavoro} F = \int_{\partial Q} F_1 \, dx + F_2 \, dy = \int_{\partial Q} H_1 \, dx + H_2 \, dy = 0.$$

3) Sia data la funzione composta

$$F(x,y) = f\left(\frac{y}{x}, \frac{g(x,y)}{x}\right)$$

dove f e g sono due funzioni di $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Determinare le derivate F_x e F_y in funzione delle derivate f_x, f_y, g_x e g_y.

Sol. Si ha

$$F_x(x,y) = f_x\left(\frac{y}{x}, \frac{g(x,y)}{x}\right)\frac{-y}{x^2} + f_y\left(\frac{y}{x}, \frac{g(x,y)}{x}\right)\frac{g_x(x,y)x - g(x,y)}{x^2},$$

$$F_y(x,y) = f_x\left(\frac{y}{x}, \frac{g(x,y)}{x}\right)\frac{1}{x} + f_y\left(\frac{y}{x}, \frac{g(x,y)}{x}\right)\frac{g_y(x,y)}{x}.$$

4) Determinare, al variare del parametro $\alpha \geq 0$, la derivata nella direzione (v_1, v_2) in $(0,0)$ di

$$f(x,y) = \sqrt{|x^\alpha y|}.$$

È tale funzione differenziabilein $(0,0)$ per $\alpha = 1$?

Sol. Si deve vedere per quali $\alpha \geq 0$ esiste finito il

$$\lim_{t\to 0} \tfrac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \tfrac{\sqrt{|t|^{\alpha+1}|v_1^\alpha v_2|}}{t} = \lim_{t\to 0} \text{sign}(t)\ |t|^{\frac{\alpha-1}{2}}\, |v_1^\alpha v_2|^{\frac{1}{2}}$$

quindi

$$D_{(v_1,v_2)}f(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1,\ \forall (v_1,v_2) \\ \nexists & \text{se } \alpha \leq 1 \text{ e } v_1 v_2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \quad \text{e } v_1 v_2 = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \text{ e } v_2 = 0. \end{cases}$$

La funzione non è differenziabile in $(0,0)$ per $\alpha = 1$ perchè in tal caso, per la regola della catena dovrebbe essere $D_{(v_1,v_2)}f(0,0) = f_x(0,0)v_1 + f_y(0,0)v_2 = 0,\ \forall (v_1,v_2)$ che contaddice il risultato precedente.

5) Dare la definzione di campo conservativo. Dimostrare che se un campo F è conservativo allora l'integrale curvilineo di F lungo una qualunque curva chiusa contenuta nel dominio di F è nullo.

Sol. Vedasi il testo e i Complementi.