ESAME di LOGICA PER INFORMATICA

24 giugno 2003

Esercizio 1. Siano Φ e Ψ due insiemi consistenti di formule. Dire, giustificando la risposta, se $\Phi \cap \Psi$ e $\Phi \cup \Psi$ sono consistenti.

Soluzione. Se fosse possibile dimostrare $\perp$ da $\Phi \cap \Psi$ allora tale dimostrazione, oltre ad eventuali assiomi, potrebbe usare solamente formule che compaiono sia in Φ che in Ψ. Ma allora si potrebbe rifare la stessa dimostrazione anche a partire dal solo insieme Φ (o dal solo insieme Ψ) che non potrebbe quindi essere consistente.

Per quanto riguarda il secondo punto, si consideri il seguente esempio. Sia p una formula prima e si ponga $\Psi \equiv \{p\}$ e $\Phi \equiv \{\neg p\}$. Allora sia Φ che Ψ sono consistenti (visto che sono soddisfacibili) ma la loro unione non lo è. Quindi la consistenza di Φ e Ψ non è sufficiente per garantire la consistenza della loro unione.

Esercizio 2.

(a) Scrivere l'albero proposizionale di

$$\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$$

C'è un'interpretazione che rende vera questa formula?

Soluzione.

$$\{\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)\}$$

$$\{\neg\alpha, (\alpha \vee \beta)\}$$

$$\{\alpha\} \qquad\qquad\qquad \{\beta\}$$

$$X$$

L'albero è completo ma non è chiuso. Si tratta quindi di una formula soddisfacibile. La valutazione desiderata è quella che rende falso α e vero β.

(b) Con l'aiuto di un albero proposizionale, determinare una valutazione che renda vere tutte le formule nel seguente insieme:

$$\Phi \equiv \{\alpha \rightarrow \beta, \neg(\neg\alpha \wedge \beta)\}$$

Soluzione.

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg(\neg\alpha \wedge \beta)\}$$

$$\neg\alpha \qquad\qquad\qquad\qquad \beta$$

$$\neg\neg\alpha \quad\quad \neg\beta \qquad\qquad\qquad \neg\neg\alpha \quad\quad \neg\beta$$

$$\alpha \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha \quad\quad X$$

$$X$$

Ci sono quindi due valutazioni che rendono vere tutte le formule dell'insieme Φ. La prima è quella che rende falsa sia α che β e la seconda è quella che le rende entrambe vere.

Esercizio 3.
(a) Dire se la formula che segue è vera in ogni interpretazione.

$$((\exists x A(x)) \to B) \quad \to \quad \forall x(A(x) \to B)$$

dove la variabile x non compare libera nella formula B.
Soluzione. Basta far vedere che la negazione della formula

$$((\exists x.A(x)) \to B) \to \forall x.(A(x) \to B)$$

si può confutare.

$$\neg(((\exists x.A(x)) \to B) \to \forall x.(A(x) \to B))$$

$$\{(\exists x.A(x)) \to B, \neg(\forall x.(A(x) \to B))\}$$

$\neg(\exists x.A(x))$	B
$\neg(A(x) \to B)$	$\neg(A(x) \to B)$
$\{A(x), \neg B\}$	$\{A(x), \neg B\}$
$\neg A(x)$	X
X	

(b) Dire se il seguente insieme di formule è confutabile.

$$\{\exists y.\forall x.A(x,y), \neg(\forall x.\exists y.A(x,y))\}$$

Soluzione. Costruiamo l'albero di confutazione

$$\{\exists y.\forall x.A(x,y), \neg(\forall x.\exists y.A(x,y))\}$$

$$\forall x.A(x,y)$$

$$\neg\exists y.A(x,y)$$

$$A(x,y)$$

$$\neg A(x,y)$$

$$X$$

Esercizio 4. Sia Σ l'insieme di formule

$$\begin{aligned}\{\quad & (\forall x)(\forall y)(\forall y')[R(x,y) \wedge R(x,y') \rightarrow \mathrm{Eq}(y,y')],\\ & (\forall x)(\forall x')(\forall y)[R(x,y) \wedge R(x',y) \rightarrow \mathrm{Eq}(x,x')],\\ & (\forall x)(\exists y)R(x,y),\\ & (\exists z)(\forall x)\neg R(x,z) \quad \}\end{aligned}$$

in un linguaggio con un segno predicativo binario R. Dimostrare che, in ogni struttura $(U, \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ in cui sono vere le formule di Σ, l'insieme U è infinito.
Soluzione. Vediamo il significato delle varie formule in Σ. La prima di esse afferma che la relazione R deve essere una funzione, la seconda che la funzione R è iniettiva, la terza che la funzione R è totale e la quarta che esiste un elemento che non è immagine tramite R di alcun altro valore. La funzione R si comporta quindi come la funzione successore tra i numeri naturali e quindi ogni struttura che soddisfi tutte le formule in Σ deve essere infinita. Infatti, per la quarta formula deve esistere un elemento u_0 che non è immagine tramite R di nessun altro elemento. D'altra parte, per la terza formula, u_0 deve avere una immagine u_1 e u_1 deve essere diverso da u_0. Ma ora anche u_1 deve avere una immagine u_2 tramite R. Ora u_2 deve essere diverso da u_0 per la quarta formula e diverso da u_1 per la seconda formula. Continuando ad argomentare in questo modo otteniamo una sequenza infinita di elementi u_0, u_1, u_2, u_3, ... uno diverso dall'altro.

Esercizio 5. Si considerino le espressioni

$$((x)\ x(y))((z)\ f(z)) \qquad\qquad ((z)\ f(z))(((y)\ y)(y))$$

dove $z : 0$, $y : 0$, $x : 0 \rightarrow 0$ e $f : 0 \rightarrow 0$. Determinarne l'arietà, trovarne la forma normale, e dimostrare che si tratta di espressioni uguali.
Soluzione. Se $y : 0$ e $x : 0 \rightarrow 0$ allora $x(y) : 0$ e quindi $((x)\ x(y)) : (0 \rightarrow 0) \rightarrow 0$. Se $z : 0$ e $f : 0 \rightarrow 0$ allora $f(z) : 0$ e quindi $((z)\ f(z)) : 0 \rightarrow 0$. Quindi $((x)\ x(y))((z)\ f(z)) : 0$.
Se $y : 0$ allora $((y)\ y) : 0 \rightarrow 0$ e quindi $((y)\ y)(y) : 0$. Se $z : 0$ e $f : 0 \rightarrow 0$ allora $f(z) : 0$ e quindi $((z)\ f(z)) : 0 \rightarrow 0$. Quindi $((z)\ f(z))(((y)\ y)(y)) : 0$.
Calcoliamo ora le loro forme normali:

$$\begin{aligned}\mathsf{nf}(((x)\ x(y))((z)\ f(z))) &= \mathsf{nf}(x(y)[x := ((z)\ f(z))])\\ &= \mathsf{nf}(((z)\ f(z))(y))\\ &= \mathsf{nf}(f(z)[z := y])\\ &= \mathsf{nf}(f(y))\\ &= f(\mathsf{nf}(y))\\ &= f(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{nf}(((z)\ f(z))(((y)\ y)(y))) &= \mathsf{nf}(f(z)[z := ((y)\ y)(y)])\\ &= \mathsf{nf}(f(((y)\ y)(y)))\\ &= f(\mathsf{nf}(((y)\ y)(y)))\\ &= f(\mathsf{nf}(y[y := y]))\\ &= f(\mathsf{nf}(y))\\ &= f(y)\end{aligned}$$

Visto che sappiamo che una espressione è uguale alla sua forma normale otteniamo ora immediatamente per transitività dell'uguaglianza che

$$((x)\ x(y))((z)\ f(z)) = f(y) = ((z)\ f(z))(((y)\ y)(y))$$

Esercizio 6. Sia Φ un insieme di formule, di un linguaggio del primo ordine, tale che: *per ogni naturale n, esiste una struttura $\mathcal{U}_n = (U_n, \mathcal{R}_n, \mathcal{F}_n, \mathcal{C}_n)$ in cui Φ è soddisfacibile ed in cui U_n è finito ed ha più di n elementi.*
Dimostrare che esiste una struttura $\mathcal{U} = (U, \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ in cui Φ è soddisfacibile ed in cui U è infinito. *Suggerimento:* dimostrare, usando il Teorema di Compattezza, che è soddisfacibile l'insieme $\Phi \cup \{\alpha_n : n \in \omega\}$, dove

$$\alpha_n \equiv (\forall x_1) \dots (\forall x_n)(\exists x)[\neg \mathrm{Eq}(x, x_1) \wedge \dots \wedge \neg \mathrm{Eq}(x, x_n)]$$

è una formula che è vera in una struttura se e solo se l'universo di tale struttura ha almeno $n + 1$ elementi.
Soluzione. Consideriamo un qualsiasi sottoinsieme finito W dell'insieme di formule $\Phi \cup \{\alpha_n : n \in \omega\}$. Esso conterrà alcune tra le formule di Φ e alcune tra le formule α_n. Esisterà quindi tra le α_n che apprtengono a W una di indice n^* massimo. Ora, per ipotesi, tra le strutture che soddisfano Φ ne esisterà una, $\mathcal{U}_{n^*}$ il cui insieme ha una cardinalità maggiore di n^*. Tale struttura renderà quindi vere tutte le formule di Φ che compaiono in W, in quanto si tratta di un modello di Φ, e anche tutte le formule del tipo α_n che appaiono in W, visto che ha più di n^* elementi, e quindi soddisferà tutte le formule in W. Abbiamo quindi dimostrato che un qualsiasi sottoinsieme finito di $\Phi \cup \{\alpha_n : n \in \omega\}$ è soddisfacibile. Ma allora, per il teorema di compattezza anche l'intero insieme $\Phi \cup \{\alpha_n : n \in \omega\}$ deve essere soddisfacibile. D'altra parte nessuna struttura finita potrà rendere vere tutte le formule in $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ e quindi la struttura che soddisfa $\Phi \cup \{\alpha_n : n \in \omega\}$ deve essere necessariamente infinita. Abbiamo quindi dimostrato che deve esserci una struttura che soddisfa Φ il cui dominio è infinito.

Compito 2

ESAME di LOGICA PER INFORMATICA

24 giugno 2003

Esercizio 1. Dimostrare che, se l'insieme $\{\alpha \to \beta,\ \alpha \to \neg\beta\}$ è consistente, allora l'insieme $\{\neg\alpha\}$ è consistente.

Prima soluzione. Se l'insieme di formule $\{\alpha \to \beta,\ \alpha \to \neg\beta\}$ è consistente allora esso è soddisfacibile. Esiste quindi una valutazione σ tale che $\sigma(\alpha \to \beta) = \top$ e $\sigma(\alpha \to \neg\beta) = \top$. Supponiamo ora che $\sigma(\beta) = \top$; allora $\sigma(\neg\beta) = \bot$ e quindi da $\sigma(\alpha \to \neg\beta) = \top$ si deduce che $\sigma(\alpha) = \bot$. D'altra parte se $\sigma(\beta) = \bot$ allora da $\sigma(\alpha \to \beta) = \top$ si deduce che $\sigma(\alpha) = \bot$. Abbiamo quindi dimostrato che $\sigma(\alpha) = \bot$ deve valere in ogni caso e quindi $\sigma(\neg\alpha) = \top$, cioé $\neg\alpha$ è soddisfacibile e quindi è consistente.

Seconda soluzione. Un insieme di formule è inconsistente se e solo se esso è confutabile. Supponiamo allora che l'insieme $\{\neg\alpha\}$ sia inconsistente. Esso sarebbe allora confutabile, sarebbe cioé possibile costruire un albero chiuso a partire dalla formula $\{\neg\alpha\}$. Proviamo ora a costruire l'albero di di confutazione per l'insieme $\{\alpha \to \beta,\ \alpha \to \neg\beta\}$

$$\{\alpha \to \beta,\ \alpha \to \neg\beta\}$$

$$\neg\alpha \qquad\qquad\qquad\qquad \beta$$

$$\neg\alpha \qquad \neg\beta \qquad\qquad\qquad \neg\alpha \qquad \neg\beta$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad X$$

Ora tutti i rami aperti contengono $\neg\alpha$ e abbiamo visto che se questa formula fosse inconsistente allora sarebbe possibile costruire un albero di confutazione sotto tutti questi rami aperti. Risulterebbe quindi che l'insieme $\{\alpha \to \beta,\ \alpha \to \neg\beta\}$ sarebbe confutabile e quindi inconsistente, contro l'ipotesi dell'esercizio.

Terza soluzione Osserviamo prima di tutto che, per ogni insieme di formule Φ e ogni formula γ, se $\Phi \vdash \gamma$ e $\Phi \cup \{\gamma\}$ è inconsistente allora Φ è inconsistente. Infatti, se $\Phi \cup \{\gamma\}$ è inconsistente allora sappiamo che $\Phi \vdash \neg\gamma$ e quindi da Φ si può derivare una formula e la sua negazione.

Supponiamo ora che $\{\neg\alpha\}$ sia inconsistente; allora anche $\{\alpha \to \beta,\ \alpha \to \neg\beta,\ \neg\alpha\}$ é inconsistente e quindi per concludere basta far vedere che $\alpha \to \beta,\ \alpha \to \neg\beta \vdash \neg\alpha$. Una prova di questo si può ottenere direttamente trovando la dimostrazione richiesta (si usa il terzo assioma) o utilizzando il fatto che $\alpha \to \beta,\ \alpha \to \neg\beta \vdash \neg\alpha$ se e solo se l'insieme di formule $\{\alpha \to \beta, \alpha \to \neg\beta, \neg\neg\alpha\}$ é confutabile

$$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \neg\beta, \neg\neg\alpha\}$$

$$\alpha$$

$$\neg\alpha \qquad\qquad\qquad\qquad \beta$$

$$X \qquad\qquad\qquad \neg\alpha \qquad \neg\beta$$

$$X \qquad X$$

Esercizio 2.
(a) Scrivere l'albero proposizionale di

$$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \beta$$

C'è un'interpretazione che rende questa formula vera?
Soluzione.

$$\{(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \beta\}$$

$$\{\neg\alpha \vee \neg\beta, \beta\}$$

$$\neg\alpha \qquad\qquad\qquad \neg\beta$$

$$X$$

La valutazione desiderata è quindi quella che valuta α in falso e β in vero.
(b) Con l'aiuto dell'albero proposizionale, determinare una valutazione che rende vere tutte le formule nel seguente insieme:

$$\{\neg(\neg\alpha \to \neg\beta), \quad (\alpha \vee \beta)\}$$

Soluzione.

$$\{\neg(\neg\alpha \to \neg\beta), \quad (\alpha \vee \beta)\}$$

$$\{\neg\alpha, \neg\neg\beta\}$$

$$\beta$$

$$\alpha \qquad\qquad\qquad\qquad \beta$$

$$X$$

La valutazione cercata è quindi quella che rende falsa α e vera β.

Esercizio 3.
(a) Dire se il seguente insieme di formule è confutabile.

$$\{\exists x.\forall y.A(x,y),\quad \exists y.\forall x.\neg A(x,y)\}$$

Soluzione. Proviamo a costruire un albero di confutazione.

$$\{\exists x.\forall y.A(x,y),\quad \exists y.\forall x.\neg A(x,y)\}$$

$$\forall y.A(x,y)$$

$$\forall x.\neg A(x,y)$$

$$A(x,y)$$

$$\neg A(x,y)$$

$$X$$

(b) Dire se la formula che segue è vera in ogni interpretazione.

$$\forall x(A(x) \to B) \quad \to \quad ((\exists x A(x)) \to B)$$

dove la variabile x non è libera nella formula B.
Soluzione. Per dimostrare che la formula $\forall x.(A(x) \to B) \to ((\exists x.A(x)) \to B)$ è vera in ogni interpretazione basta far vedere che la sua negazione è confutabile.

$$\neg(\forall x.(A(x) \to B) \to ((\exists x.A(x)) \to B))$$

$$\{\forall x.(A(x) \to B), \neg((\exists x.A(x)) \to B)\}$$

$$\{\exists x.A(x), \neg B\}$$

$$A(x)$$

$$A(x) \to B$$

$$\neg A(x) \qquad\qquad\qquad\qquad B$$

$$X \qquad\qquad\qquad\qquad X$$

Esercizio 4. Determinare una struttura che soddisfi le seguenti formule:

$$(\forall x)(\exists y)\ x\ R\ y \qquad (\forall x)(\forall y)\ x\ R\ y \ \to\ \neg(x = y)$$

Soluzione. Una struttura adatta si può trovare su un qualsiasi dominio U che abbia almeno due elementi interpretando il simbolo predicativo a due posti R nella relazione binaria i cui elementi sono le coppie di elementi distinti di U. Infatti in questo caso, data una qualsiasi interpretazione σ delle variabili, si ottiene subito che

$$((\forall x)(\exists y)\ x\ R\ y)^\sigma = \top$$

$$((\forall x)(\forall y)\ x\ R\ y\ \rightarrow\ \neg(x = y))^\sigma = \top$$

Esercizio 5. Determinare la formula del primo ordine H che esprime la proprietà dell'arresto per la seguente macchina di Turing su un linguaggio con simboli S_0 e S_1:

- $q_0\ S_0\ S_0\ q_1$
- $q_1\ S_0\ S_1\ q_0$

Dimostrare che si tratta di una macchina che si arresta qualunque sia il nastro su cui deve operare.
Soluzione. Secondo quanto visto a lezione, la formula cercata è

$$H \equiv (\exists t.\exists x.\ t\ Q_0\ x\ \wedge\ t\ S_1\ x) \vee (\exists t.\exists x.\ t\ Q_1\ x\ \wedge\ t\ S_1\ x)$$

Per dimostrare che la macchina si arresta per ogni possibile configurazione iniziale del nastro consideriamo i due casi possibili quando si opera con un alfabeto costituito dai soli simboli S_0 e S_1.

1. La macchina parte nello stato q_0 e legge sul nastro S_0. In questo caso essa scrive S_0 ed entra nello stato q_1. Perciò essa si trova nello stato q_1 e legge S_0 sul nastro. Quindi scrive S_1 sul nastro e torna nello stato q_0 in cui si arresta in mancanza di istruzioni eseguibili.

2. La macchina parte nello stato q_0 e legge sul nastro S_1. In questo caso essa si arresta immediatamente per mancanza di istruzioni eseguibili

Anche se, per convenzione, si suppone che una macchina di Turing parta sempre dallo stato q_0, è interessante notare che questa particolare macchina si arresta con una qualunque configurazione del nastro anche se dovesse partire nello stato q_1.

Esercizio 6. Sia $\Phi \cup \{(\forall x)\alpha\}$ un insieme confutabile di formule. Dimostrare che esiste un insieme finito $\{t_1, \ldots, t_n\}$ di termini tali che $\Phi \cup \{\alpha[x := t_1], \ldots, \alpha[x := t_n]\}$ è confutabile.
Suggerimento: tenere presente che ogni albero di confutazione è finito.
Soluzione. Dire che l'insieme di formule $\Phi \cup \{(\forall x)\ \alpha\}$ è confutabile significa che esiste per tale insieme un albero *finito* di confutazione. Ma allora nella costruzione di tale albero la formula $(\forall x)\ \alpha$ sarà stata usata un numero finito n di volte istanziando la variabile x con i termini $t_1, \ldots, t_n$. Per chiudere l'albero ho quindi usato solo le formule $\alpha[x := t_1]$, $\ldots$, $\alpha[x := t_n]$ e quindi l'albero di confutazione per $\Phi \cup \{(\forall x)\alpha\}$ sarà anche un albero di confutazione per $\Phi \cup \{\alpha[x := t_1], \ldots, \alpha[x := t_n]\}$.