ESAME di LOGICA PER INFORMATICA
8 luglio 2003

Esercizio 1.
(a) Si dimostri che, se gli insiemi $\{\alpha\}$ e $\{\beta\}$ sono inconsistenti, allora anche l'insieme $\{\neg\alpha \to \beta\}$ è inconsistente.
Soluzione. Se gli insiemi di formule $\{\alpha\}$ e $\{\beta\}$ sono inconsistenti allora essi sono confutabile, si può cioé costruire un albero di confutazione T_α per la formula α e un albero di confutazione T_β per la formula β. Consideriamo ora il seguente albero proposizionale

$$\{\neg\alpha \to \beta\}$$

$$\neg\neg\alpha \qquad\qquad\qquad\qquad \beta$$

$$\alpha$$

Esso si può estendere ad un albero di confutazione aggiungendo sotto la formula α l'albero di confutazione T_α e sotto la formula β l'albero di confutazione T_β. Nell'ipotesi che $\{\alpha\}$ e $\{\beta\}$ siano inconsistenti, abbiamo perciò costruito un albero di confutazione per $\{\neg\alpha \to \beta\}$ che risulta essere quindi inconsistente.

(b) Trovare un esempio di insieme inconsistente della forma $\{\alpha \to \beta\}$ tale che almeno uno degli insiemi $\{\alpha\}$ e $\{\beta\}$ sia consistente.
Soluzione. Sia γ una qualsiasi formula. Poniamo allora $\alpha \equiv \gamma \vee \neg\gamma$ e $\beta \equiv \gamma \wedge \neg\gamma$. Allora l'insieme $\{\alpha\}$ è consistente visto che esso è soddisfacibile ma $\{\alpha \to \beta\}$ è inconsistente visto che non può essere soddisfatto da alcuna valutazione.

Esercizio 2.
(a) Dimostrare, utilizzando gli alberi di confutazione, che

$$(A \to (A \wedge B)) \vee (B \to (A \wedge B))$$

è una tautologia.
Soluzione.

$$\neg((A \to (A \wedge B)) \vee (B \to (A \wedge B)))$$

$$\{\neg(A \to (A \wedge B)), \neg(B \to (A \wedge B))\}$$

$$\{A, \neg(A \wedge B)\}$$

$$\{B, \neg(A \wedge B)\}$$

$$\neg A \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neg B$$

$$X \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad X$$

(b) Fornire, se esiste, una valutazione proposizionale che soddisfi tutte le formule del seguente insieme

$$\Phi \equiv \{A \rightarrow B, B \rightarrow (C \vee A), C \rightarrow \neg A, A\}$$

Prima soluzione. Basta costruire un albero proposizionale completo e analizzare le formule prime che compaiono sul ramo che eventualmente non si dovesse chiudere.

$\{A \rightarrow B, B \rightarrow (C \vee A), C \rightarrow \neg A, A\}$

$\neg A$ $\quad$ B

X $\quad$ $\neg B$ $\quad$ $C \vee A$

X $\quad$ C $\quad$ A

$\neg C$ $\quad$ $\neg A$ $\quad$ $\neg C$ $\quad$ $\neg A$

X $\quad$ X $\quad$ X

Esiste quindi un unico ramo non chiuso. La valutazione cercata è quindi quella che valuta in vero A e B e in falso C.

Seconda soluzione. Osservando l'insieme Φ si nota immediatamente che qualsiasi valutazione che renda vere tutte le sue formule deve valutare la formula A in vero. Ma allora la prima formula richiede che la formula B sia valutata in vero e la terza formula richiede che la formula C sia valutata in falso. Ci resta solo da verificare che con questa valutazione anche la seconda formula venga valutata in vero, ma questo è immediato.

Esercizio 3. Dimostrare, utilizzando direttamente la definizione di interpretazione, che la formula

$$(\exists x)(A(x) \rightarrow (\forall x)A(x))$$

è vera in ogni struttura per ogni interpretazione. Dimostrare poi che la sua negazione è confutabile.

Soluzione. Verifichiamo che la formula $(\exists x)(A(x) \rightarrow (\forall x)A(x))$ vale in ogni struttura che permetta di interpretare il simbolo predicativo A. Sia $\mathcal{U} \equiv (U, \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ una struttura e σ una interpretazione delle formule in $\mathcal{U}$. Allora

$$
\begin{array}{lll}
((\exists x)(A(x) \to (\forall x)A(x)))^{\sigma} = \top & \text{se e solo se} & \text{esiste un elemento } u \in U \text{ tale che} \\
& & (A(x) \to (\forall x)A(x)))^{\sigma[x/u]} = \top \\
& \text{se e solo se} & \text{esiste un elemento } u \in U \text{ tale che} \\
& & (A(x))^{\sigma[x/u]} = \bot \text{ oppure} \\
& & ((\forall x)A(x)))^{\sigma[x/u]} = \top \\
& \text{se e solo se} & \text{esiste un elemento } u \in U \text{ tale che} \\
& & (A(x))^{\sigma[x/u]} = \bot \text{ oppure} \\
& & \text{per ogni elemento } v \in U \\
& & (A(x))^{\sigma[x/u][x/v]} = \top \\
& \text{se e solo se} & \text{esiste un elemento } u \in U \text{ tale che} \\
& & (A(x))^{\sigma[x/u]} = \bot \text{ oppure} \\
& & \text{per ogni elemento } v \in U \\
& & (A(x))^{\sigma[x/v]} = \top
\end{array}
$$

dove è evidente che l'ultima condizione è sempre verificata.
Vediamo ora che la negazione di tale formula è confutabile

$$
\begin{array}{c}
\neg((\exists x)(A(x) \to (\forall x)A(x))) \\[1em]
\neg(A(x) \to (\forall x)A(x)) \\[1em]
\{A(x), \neg((\forall x)A(x))\} \\[1em]
\neg A(y) \\[1em]
\neg(A(y) \to (\forall x)A(x)) \\[1em]
\{A(y), \neg((\forall x)A(x))\} \\[1em]
X
\end{array}
$$

Esercizio 4. Si consideri l'espressione

$$e \equiv ((x)\ x(y))((z)\ z)$$

Determinare una opportuna arietà delle variabili tale che sia possibile assegnare arietà 0 ad e. Calcolare poi la forma normale di e e determinare l'insieme delle variabili che vi appaiono libere.
Soluzione. Prima di tutto si nota che e è una applicazione. Quindi, affinché essa sia una espressione di arietà 0 bisogna che ci sia una qualche arietà α tale che $((x)\ x(y))$ sia una espressione di arietà $\alpha \to 0$ e $((z)\ z)$ sia una espressione di arietà α. Ora $((x)\ x(y))$ è una astrazione e quindi affinché la sua arietà sia $\alpha \to 0$ bisogna che x sia una variabile di arietà α e $x(y)$ sia una espressione di arietà 0. Affinché sia possibile che $x(y)$ sia una espressione di arietà 0 bisogna che, per qualche arietà β, l'aretà α della variabile x sia uguale a $\beta \to 0$

e l'arietà della variabile y sia β. Abbiamo quindi scoperto che l'arietà di $((z)\ z)$ deve essere $\beta \rightarrow 0$, per qualche arietà β. Osserviamo ora che $((z)\ z)$ è una astrazione della variabile z di arietà β dall'espressione z di arietà 0. Abbiamo quindi scoperto che z deve essere una variabile di arietà 0 e quindi $\beta \equiv 0$. Abbiamo quindi risolto la prima parte dell'esercizio: z deve essere una variabile di arietà 0, y una variabile di arietà 0 e x una variabile di arietà $0 \rightarrow 0$.
Adesso che abbiamo dimostrato che e è una espressione dotata di arietà possiamo calcolarne la forma normale.

$$\begin{aligned}
\mathsf{nf}(((x)\ x(y))((z)\ z)) &= \mathsf{nf}(x(y)[x := ((z)\ z)]) \\
&= \mathsf{nf}(((z)\ z)(y)) \\
&= \mathsf{nf}(z[z := y]) \\
&= \mathsf{nf}(y) \\
&= y
\end{aligned}$$

La sola variabile libera nella forma normale di e è quindi y.

Esercizio 5. Fornire, se esiste, una valutazione predicativa che soddisfi tutte le formule del seguente insieme

$$\begin{aligned}
\{\ &\forall x.\forall y.\exists z.\neg \mathrm{Eq}(x,z) \wedge \neg \mathrm{Eq}(y,z), \\
&\forall x.\exists y.R(x,y)\ \wedge\ (\forall z.R(x,z) \rightarrow \mathrm{Eq}(y,z)), \\
&\forall x.\neg R(x,x), \\
&\forall x.\forall y.\forall z.(R(x,y)\ \wedge\ R(y,z)) \rightarrow \mathrm{Eq}(x,z)\ \}.
\end{aligned}$$

Suggerimento: Qual'è il numero minimo di elementi che deve avere una struttura in cui siano verificate tutte le formule dell'insieme dato?
Soluzione. Analizziamo il significato delle varie formule quando esse vengano interpretate in una struttura. La prima sostiene che la struttura deve avere almeno tre elementi. La seconda che la relazione in cui il segno predicativo binario R va interpretato è una funzione totale f_R. La terza che tale relazione non è riflessiva, vale a dire che per nessun elemento u della struttura deve succedere che $f_R(u) = u$. Infine la quarta formula sostiene che, per ogni elemento u della struttura, $f_R(f_R(u)) = u$. Una volta capito il significato delle quattro formule non è difficile fornire esempi di strutture che le soddisfino. Un semplice esempio finito è costituito da un insieme di quattro elementi $\{a,b,c,d\}$ e da una relazione $f_R = \{< a,b >, < b,a >, < c,d >, < d,c >\}$ mentre un esempio infinito sono i numeri interi privati dello 0 e la funzione *opposto* che al numero intero z associa il numero intero $-z$.