ESAME di LOGICA PER INFORMATICA
8 settembre 2003

Esercizio 1.
(a) Dimostrare che, se l'insieme $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ è consistente, allora, per ogni formula β, l'insieme $\{\beta \to \alpha_1, \dots, \beta \to \alpha_n\}$ è consistente.
Soluzione. Se l'insieme $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ è consistente allora esso è soddisfacibile; esiste quindi una valutazione $\sigma(-)$ che rende vere tutte le formule $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, vale a dire tale che $\sigma(\alpha_1) = \top, \dots, \sigma(\alpha_n) = \top$. Ma allora, per definizione di valutazione proposizionale, vale anche $\sigma(\beta \to \alpha_1) = \top, \dots, \sigma(\beta \to \alpha_n) = \top$ e quindi l'insieme $\{\beta \to \alpha_1, \dots, \beta \to \alpha_n\}$ è soddisfacibile e perciò consistente.

(b) Trovare un esempio di insieme consistente della forma $\{\beta \to \alpha_1, \dots, \beta \to \alpha_n\}$, tale che l'insieme $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ non sia consistente.
Soluzione. Un semplice esempio si ottiene ponendo $n = 1$, $\alpha \equiv \gamma \wedge \neg\gamma$ e $\beta \equiv \gamma \wedge \neg\gamma$. Allora l'insieme $\{\alpha\} \equiv \{\gamma \wedge \neg\gamma\}$ non è consistente, visto che non è soddisfacibile, mentre l'insieme $\{\beta \to \alpha\} \equiv \{(\gamma \wedge \neg\gamma) \to (\gamma \wedge \neg\gamma)\}$ è soddisfacibile, visto che ogni valutazione rende vera la formula $(\gamma \wedge \neg\gamma) \to (\gamma \wedge \neg\gamma)$, e quindi esso risulta consistente.

Esercizio 2.
(a) Dimostrare utilizzando gli alberi di confutazione che

$$(A \to B) \vee (B \to A)$$

é una tautologia.
Soluzione.

$$\neg((A \to B) \vee (B \to A))$$

$$\{\neg(A \to B), \neg(B \to A)\}$$

$$\{A, \neg B\}$$

$$\{B, \neg A\}$$

$$X$$

(b) Fornire, se esiste, una valutazione proposizionale che soddisfi tutte le formule del seguente insieme

$$\Phi \equiv \{A \to \neg B, (C \wedge A) \to B, A\}$$

Prima soluzione. Basta costruire un albero proposizionale completo e analizzare le formule prime che compaiono sul ramo che eventualmente non si dovesse chiudere.

$$\{A \to \neg B, (C \wedge A) \to B, A\}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\neg A & & & \neg B & \\
X & & \neg(C \wedge A) & & B \\
 & \neg C & & \neg A & X \\
 & & & X &
\end{array}$$

Esiste quindi un unico ramo non chiuso. La valutazione cercata è quindi quella che valuta in vero A e in falso B e C.

Seconda soluzione. Osservando l'insieme Φ si nota immediatamente che qualsiasi valutazione che renda vere tutte le sue formule deve valutare la formula A in vero. Ma allora la prima formula richiede che la formula B sia valutata in falso e quindi la seconda formula richiede che la formula $C \wedge A$ sia valutata in falso e, visto che A deve essere valutata in vero, l'unica possibilità è valutare C in falso.

Esercizio 3. Dimostrare, utilizzando direttamente la definizione di interpretazione, che la formula

$$(\exists x)((\exists x)A(x) \to A(x))$$

é vera in ogni struttura per ogni interpretazione. Dimostrare poi che la sua negazione é confutabile.

Soluzione. Verifichiamo che la formula $(\exists x)((\exists x)A(x) \to A(x))$ vale in ogni struttura che permetta di interpretare la formula $A(x)$. Sia $\mathcal{U} \equiv (U, \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ una struttura e σ una interpretazione delle formule in $\mathcal{U}$. Allora

$$\begin{array}{rll}
((\exists x)((\exists x)A(x) \to A(x)))^\sigma = \top & \text{se e solo se} & \text{esiste un elemento } u \in U \text{ tale che} \\
 & & ((\exists x)A(x) \to A(x))^{\sigma[x/u]} = \top \\
 & \text{se e solo se} & \text{esiste un elemento } u \in U \text{ tale che} \\
 & & ((\exists x)A(x))^{\sigma[x/u]} = \bot \text{ oppure} \\
 & & (A(x))^{\sigma[x/u]} = \top \\
 & \text{se e solo se} & \text{esiste un elemento } u \in U \text{ tale che} \\
\text{la valutazione di } (\exists x)A(x) \text{ non} & & ((\exists x)A(x))^{\sigma} = \bot \text{ oppure} \\
\text{dipende dalla valutazione di } x & & (A(x))^{\sigma[x/u]} = \top \\
 & \text{se e solo se} & ((\exists x)A(x))^{\sigma} = \bot \text{ oppure} \\
 & & \text{esiste un elemento } u \in U \text{ tale che} \\
 & & (A(x))^{\sigma[x/u]} = \top \\
 & \text{se e solo se} & \text{per ogni elemento } v \in U \\
 & & (A(x))^{\sigma[x/v]} = \bot \text{ oppure} \\
 & & \text{esiste un elemento } u \in U \text{ tale che} \\
 & & (A(x))^{\sigma[x/u]} = \top
\end{array}$$

dove è evidente che l'ultima condizione è sempre verificata.

Vediamo ora che la negazione di tale formula è confutabile

$$\neg((\exists x)((\exists x)A(x) \to A(x)))$$

$$\neg((\exists x)A(x) \to A(x))$$

$$\{(\exists x)A(x), \neg A(x)\}$$

$$A(y)$$

$$\neg((\exists x)A(x) \to A(y))$$

$$\{(\exists x)A(x), \neg A(y)\}$$

$$X$$

Esercizio 4. Si descriva formalmente, tramite un insieme di formule del primo ordine, la seguente macchina di Turing su un alfabeto con i due soli simboli S_0 e S_1 e si dimostri che esiste una configurazione iniziale del nastro tale che se la macchina viene fatta partire su tale nastro nello stato q_0 allora essa non si arresta:

$$\begin{array}{l} q_0\ S_1\ R\ q_1 \\ q_1\ S_0\ R\ q_0 \end{array}$$

Soluzione. Seguendo la teoria, dobbiamo utilizzare un linguaggio che contenga i simboli predicativi Q_0 e Q_1, per rappresentare in quale stato si trova la macchina in un certo istante e quale casella sta analizzando, e S_0 e S_1, per rappresentare quale simbolo c'è in un certo istante nella casella analizzata. Per descrivere il programma della nostra macchina possiamo allora utilizzare le seguenti formule

$$\begin{array}{l} \forall t \forall x\ [t\, Q_0\, x\ \wedge\ t\, S_1\, x \to (t'\, Q_1\, x'\ \wedge\ \forall y\ ((t\, S_0\, y \to t'\, S_0\, y)\ \wedge\ (t\, S_1\, y \to t'\, S_1\, y)))] \\ \forall t \forall x\ [t\, Q_1\, x\ \wedge\ t\, S_0\, x \to (t'\, Q_0\, x'\ \wedge\ \forall y\ ((t\, S_0\, y \to t'\, S_0\, y)\ \wedge\ (t\, S_1\, y \to t'\, S_1\, y)))] \end{array}$$

Affinché la macchina non si arresti bisogna che all'istante iniziale la casella iniziale contenga il simbolo S_1. Essa si sposta quindi a destra ed entra nello stato q_1. Affinché essa non si arresti bisogna ora che essa stia osservando una casella che contiene il simbolo S_0. In questo caso essa si sposta di nuovo a destra ed entra nello stato q_0. Siamo quindi di nuovo nella condizione iniziale. Perciò affinché la macchina non si arresti la configurazione iniziale del nastro deve essere la seguente

$$\ldots S_1 S_0 S_1 S_0 S_1 S_0 S_1 S_0 S_1 S_0 S_1 S_0 \ldots$$

Esercizio 5. Supponiamo che Φ sia un insieme finito di formule del primo ordine scritte senza utilizzare mai il connettivo $\neg$. Dimostrare che Φ non é confutabile. *Suggerimento*: dimostrare che in un qualunque albero predicativo per Φ c'é sempre almeno un ramo che contiene solo formule scritte senza usare il connettivo $\neg$.

Soluzione. Se riusciamo a dimostrare che in qualunque albero predicativo per Φ c'é sempre un ramo che contiene solo formule scritte senza usare il connettivo $\neg$ allora tale albero non potrà sicuramente essere un albero di confutazione visto che in un albero di confutazione ogni ramo deve contenere una formula e la sua negazione.
Dimostriamo allora, per induzione sulla costruzione dell'albero predicativo, che se Φ é un insieme finito di formule del primo ordine scritte senza utilizzare mai il connettivo $\neg$ allora tale ramo esiste. Infatti, quando l'albero é costituito dalla sola radice tale proprietà é ovviamente verificata. D'altra parte se supponiamo di avere costruito un albero per Φ in cui compare un ramo R che non contiene alcuna formula scritta utilizzando il connettivo $\neg$ allora se sviluppiamo tale albero in virtù di una formula presente in un ramo diverso da R allora R rimarrà un ramo che non contiene nessuna formula scritta utilizzando il connettivo $\neg$. Se invece il nuovo albero é costruito in virtù di una formula presente nel ramo R allora basta analizzare i casi possibili per vedere che troviamo in ogni caso un ramo che contiene solo formule scritte senza utilizzare il connettivo $\neg$.

- La formula utilizzata sia $A \rightarrow B$. Allora il nuovo albero si ottiene aggiungendo ad R le due nuove foglie $\{\neg A\}$ e $\{B\}$ e quindi il ramo ottenuto aggiungendo ad R la foglia $\{B\}$ non contiene alcuna formula scritta utilizzando il connettivo $\neg$ visto che esso, per ipotesi, non appare in B.

- La formula utilizzata sia $A \,\&\, B$. Allora il nuovo albero si ottiene aggiungendo ad R la nuova foglia $\{A, B\}$ e quindi tale ramo non contiene alcuna formula scritta utilizzando il connettivo $\neg$ visto che esso non appare ne in A ne in B.

- La formula utilizzata sia $A \vee B$. Allora il nuovo albero si ottiene aggiungendo ad R le due nuove foglie $\{A\}$ e $\{B\}$ e quindi, ad esempio, il ramo ottenuto aggiungendo ad R la foglia $\{A\}$ non contiene alcuna formula scritta utilizzando il connettivo $\neg$.

- La formula utilizzata sia $\forall x.A$. Allora il nuovo albero si ottiene aggiungendo ad R la nuova foglia $\{A[x := t]\}$, dove t é un termine arbitrario, e quindi tale ramo non contiene alcuna formula scritta utilizzando il connettivo $\neg$.

- La formula utilizzata sia $\exists x.A$. Allora il nuovo albero si ottiene aggiungendo ad R la nuova foglia $\{A[x := y]\}$, dove y é una variabile che non appare in R, e quindi tale ramo non contiene alcuna formula scritta utilizzando il connettivo $\neg$.