ESAME di LOGICA PER INFORMATICA
26 settembre 2003

**Esercizio 1.** (a) Dimostrare che se gli insiemi $\{\alpha\}$ e $\{\neg\alpha, \beta\}$ sono inconsistenti, allora anche $\{\beta\}$ è inconsistente.
**Soluzione.** Se $\{\alpha\}$ è inconsistente allora la formula $\alpha$ non è soddisfacibile e quindi non esiste alcuna valutazione proposizionale che renda $\alpha$ vera. Ne segue che ogni valutazione proposizionale rende $\neg\alpha$ vera. Consideriamo ora l'insieme $\{\neg\alpha, \beta\}$. Per ipotesi, anche questo insieme è inconsistente e quindi esso non è soddisfacibile, vale a dire che non esiste nessuna valutazione che renda vere contemporaneamente sia $\neg\alpha$ che $\beta$. D'altra parte abbiamo stabilito che ogni valutazione proposizionale valuta $\neg\alpha$ in vero e quindi ne segue che deve essere $\beta$ che viene valutato in falso, cioè $\beta$ risulta essere non soddisfacibile. Ma allora $\{\beta\}$ è inconsistente.

(b) Sia $\Phi$ un insieme infinito non consistente di formule. Dimostrare che esiste un sottoinsieme finito $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ di $\Phi$ tale che la formula

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \beta$$

è una tautologia per ogni formula $\beta$. *Suggerimento:* usare il teorema di Compattezza.
**Soluzione.** Se $\Phi$ è un insieme inconsistente di formule allora esso non è soddisfacibile. In virtù del teorema di compattezza, deve quindi esistere un suo sottoinsieme finito $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ che è non soddisfacibile, tale cioè che non esiste alcuna valutazione che valuta in vero tutte le formule in $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Ma allora ogni valutazione valuta $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ in falso, visto che valuta in falso almeno una tra le formule $\alpha_1$, $\ldots$, $\alpha_n$, e quindi valuta $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \beta$ in vero.

**Esercizio 2.** (a) Dimostrare, utilizzando un opportuno albero di confutazione, che la seguente formula é una tautologia

$$((A \wedge B) \to C) \to ((A \to C) \vee (B \to C))$$

**Soluzione.**

$$\neg(((A \wedge B) \to C) \to ((A \to C) \vee (B \to C)))$$

$$\{(A \wedge B) \to C, \neg((A \to C) \vee (B \to C))\}$$

$$\{\neg(A \to C), \neg(B \to C)\}$$

$$\{A, \neg C\}$$

$$\{B, \neg C\}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \neg(A \wedge B) & & & C \\ \neg A & & \neg B & & X \\ X & & X & & \end{array}$$

(b) Sia

$$\Phi = \{(A \wedge B) \rightarrow C, C \rightarrow A, D\}$$

un insieme di formule proposizionali. Scegliere opportunamente la formula proposizionale $D$ in modo tale che essa sia soddisfacibile e renda l'insieme $\Phi$ confutabile.

**Soluzione.** Proviamo a costruire l'albero proposizionale per l'insieme $\Phi$ in modo da vedere quale formula scegliere per $D$ in modo da riuscire a chiudere tutti i rami.

$$\{(A \wedge B) \rightarrow C, C \rightarrow A, D\}$$

$$\neg(A \wedge B) \qquad\qquad\qquad\qquad C$$

$$\neg A \qquad \neg B \qquad\qquad \neg C \qquad A$$

$$\neg C \quad A \qquad \neg C \quad A \qquad\qquad X$$

$$X$$

Nella costruzione dell'albero compaiono alcuni rami che già si chiudono, qualsiasi sia la formula $D$. Dobbiamo quindi scegliere $D$ in modo da chiudere i rami che sono rimasti aperti. Per chiudere il ramo più a sinistra basta un $C$ che è sufficente anche per il secondo ramo rimasto aperto. Per gli altri due basta $\neg A$. Concludendo possiamo porre $D \equiv C \wedge \neg A$ e tutti i rami risulteranno chiusi. È ovvio che questa scelta rispetta anche la condizione che $D$ sia soddisfacibile in quanto per ottenere una valutazione che rende vera $D$ basta valutare $C$ in vero e $A$ in falso.

**Esercizio 3.** Dimostrare, utilizzando la definizione di interpretazione, che la seguente formula del primo ordine é vera in ogni interpretazione

$$\exists x.(A(x) \rightarrow B) \rightarrow ((\forall x.A(x)) \rightarrow B)$$

dove $B$ é una formula che non dipende da $x$. Verificare il risultato precedente utilizzando gli alberi di confutazione.

**Soluzione.** Verifichiamo che la formula $\exists x.(A(x) \rightarrow B) \rightarrow ((\forall x.A(x)) \rightarrow B)$ vale in ogni struttura che permetta di interpretare la formula $A(x)$. Sia $\mathcal{U} \equiv (U, \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ una struttura e $\sigma$ una interpretazione delle formule in $\mathcal{U}$. Allora

$$
\begin{array}{rcl}
(\exists x.(A(x) \to B) \to ((\forall x.A(x)) \to B))^\sigma = \top & \text{sse} & \exists x.(A(x) \to B)^\sigma = \bot \\
 & & \text{oppure } (\forall x.A(x)) \to B)^\sigma = \top \\
 & \text{sse} & \text{per ogni } u \in U,\ (A(x) \to B)^{\sigma[x/u]} = \bot \\
 & & \text{oppure } (\forall x.A(x))^\sigma = \bot \\
 & & \text{oppure } (B)^\sigma = \top \\
 & \text{sse} & \text{per ogni } u \in U,\ (A(x))^{\sigma[x/u]} = \top \\
 & & \qquad\qquad \text{e } (B)^{\sigma[x/u]} = \bot \\
 & & \text{oppure esiste } v \in U \text{ tale che} \\
 & & \qquad\qquad (A(x))^{\sigma[x/v]} = \bot \\
 & & \text{oppure } (B)^\sigma = \top \\
 & \text{sse} & \text{per ogni } u \in U,\ (A(x))^{\sigma[x/u]} = \top \\
x \text{ non appare in } B & & \qquad\qquad \text{e } (B)^\sigma = \bot \\
 & & \text{oppure esiste } v \in U \text{ tale che} \\
 & & \qquad\qquad (A(x))^{\sigma[x/v]} = \bot \\
 & & \text{oppure } (B)^\sigma = \top \\
 & \text{sse} & \text{per ogni } u \in U,\ (A(x))^{\sigma[x/u]} = \top \\
 & & \text{oppure esiste } v \in U \text{ tale che} \\
 & & \qquad\qquad (A(x))^{\sigma[x/v]} = \bot \\
 & & \text{oppure } (B)^\sigma = \top \\
 & & \text{e} \\
 & & (B)^\sigma = \bot \\
 & & \text{oppure esiste } v \in U \text{ tale che} \\
 & & \qquad\qquad (A(x))^{\sigma[x/v]} = \bot \\
 & & \text{oppure } (B)^\sigma = \top
\end{array}
$$

dove è evidente che entrambe le condizioni sono sempre verificate.
Vediamo ora che la negazione di tale formula è confutabile

$$\neg(\exists x.(A(x) \to B) \to ((\forall x.A(x)) \to B))$$

$$\{\exists x.(A(x) \to B), \neg((\forall x.A(x)) \to B)\}$$

$$\{\forall x.A(x), \neg B\}$$

$$
\begin{array}{lcc}
x \text{ non appare in } B & A(x) \to B & \\
\neg A(x) & & B \\
A(x) & & X \\
X & &
\end{array}
$$

**Esercizio 4.** Fornire, se esiste, una valutazione predicativa che soddisfi tutte le formule del seguente insieme

$$
\begin{array}{l}
\{\ \forall x.\exists y.R(x,y), \\
\quad \forall x.\exists y.\neg R(x,y), \\
\quad \forall x.\forall y.\forall z.Eq(x,y) \vee Eq(x,z) \vee Eq(y,z), \\
\quad \forall x.\forall y.R(x,y) \to \neg Eq(x,y)\ \}
\end{array}
$$

*Suggerimento:* Quanti elementi deve avere una struttura affinché tutte le formule dell'insieme dato siano vere?
**Soluzione.** La terza formula può essere soddisfatta solamente in una struttura il cui dominio $U$ abbia al massimo due elementi. Ora per riuscire ad interpretare validamente il simbolo predicativo $R$, a causa della prima formula, abbiamo bisogno di una relazione tale che ogni elemento $a$ del dominio sia in relazione con almeno un altro elemento $b$ e, a causa dell'ultima formula, non può accadere che $a$ e $b$ coincidano. Una possibilità è quindi porre

$$\begin{array}{rcl} U & \equiv & \{0,1\} \\ \mathcal{R} & \equiv & \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\} \end{array}$$

e interpretare $R$ in $\mathcal{R}$.
È allora immediato verificare che in questo modo tutte le formule sono soddisfatte.

**Esercizio 5.** Si determini una espressione $e$ che risolva la seguente equazione

$$e(y) = ((y)(x)y)(y)(e)$$

Si dimostri che qualsiasi altra soluzione della precedente equazione é uguale ed $e$.
**Soluzione.** Possiamo iniziare semplificando l'espressione a destra. Infatti, utilizzando due volte la $\beta$-uguaglianza si ottiene che

$$((y)(x)y)(y)(e) = y$$

Quindi l'equazione che dobbiamo risolvere si riduce a

$$e(y) = y$$

che ammette una soluzione evidente:

$$e \equiv ((y)\ y)$$

Supponiamo ora che $f$ sia un'altra soluzione della stessa equazione. Allora

$$e(y) = y = f(y)$$

e quindi

$$e(y) = f(y)$$

Ma allora, utilizzando la $\xi$-uguaglianza otteniamo che

$$((y)\ e(y)) = ((y)\ f(y))$$

e quindi per la $\eta$-uguaglianza otteniamo

$$e = ((y)\ e(y)) = ((y)\ f(y)) = f$$