COMPITO di LOGICA PER INFORMATICA
15 settembre 2004

Nome: Matricola:

Esercizio 1 Si consideri la scrittura

$$e \equiv ((x)\ x(y))((z)\ y(z)) \equiv (\lambda x.\ x(y))(\lambda z.\ y(z))$$

Dimostrare che non è possibile assegnare nessuna arietà ad e. (*Sugg.*: si ricordi che non è possibile assegnare alcuna arietà alla scrittura $w(w)$)

Soluzione. Supponiamo per assurdo che sia possibile assegnare una arietà ad e. Si potrebbe quindi utilizzare l'algoritmo di forma normale per ottenerne la forma normale. Otterremo perciò

$$(\lambda x.\ x(y))(\lambda z.\ y(z)) \Rightarrow (\lambda z.\ y(z))(y) \Rightarrow y(y)$$

e quindi dovrebbe essere possibile assegnare una arietà a $y(y)$, cosa che sappiamo non essere possibile.

Esercizio 2
Sia Σ l'insieme di formule

$$
\begin{aligned}
\{ \quad & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[R(x,y) \wedge R(x,z) \to \mathrm{Eq}(y,z)], \\
& (\forall x)(\forall w)(\forall y)[R(x,y) \wedge R(w,y) \to \mathrm{Eq}(x,w)], \\
& (\forall x)(\exists y)R(x,y), \\
& (\exists z)(\forall x)\neg R(x,z) \quad \}
\end{aligned}
$$

in un linguaggio del primo ordine con uguaglianza e un segno predicativo binario R. Dimostrare che, in ogni struttura $(U, \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ in cui sono vere tutte le formule di Σ, l'insieme U è infinito.

Soluzione. Vediamo il significato delle varie formule in Σ. La prima di esse afferma che la relazione R deve essere una funzione, la seconda che la funzione R é iniettiva, la terza che la funzione R é totale e la quarta che esiste un elemento che non é immagine tramite R di alcun altro valore. La funzione R si comporta quindi come la funzione successore tra i numeri naturali e quindi ogni struttura che soddisfi tutte le formule in Σ deve essere infinita. Infatti, per la quarta formula deve esistere un elemento u_0 che non é immagine tramite R di nessun altro elemento. D'altra parte, per la terza formula, u_0 deve avere una immagine u_1 e u_1 deve essere diverso da u_0. Ma ora anche u_1 deve avere una immagine u_2 tramite R. Ora u_2 deve essere diverso da u_0 per la quarta formula e diverso da u_1 per la seconda formula. Continuando ad argomentare in questo modo otteniamo una sequenza infinita di elementi u_0, u_1, u_2, u_3, $\ldots$ uno diverso dall'altro.

Esercizio 3

- Sia $\alpha_0 \equiv (A \to (B \vee C)) \wedge (A \to \neg B) \wedge \neg(A \to C)$. Dimostrare che α_0 è confutabile.
- Sia $\alpha_1 \equiv (A \to (B \vee C)) \vee ((C \to A) \wedge (C \to \neg B))$. Dimostrare che α_1 è una tautologia.
- Si ponga $\alpha_{n+2} \equiv \alpha_{n+1} \to \alpha_n$. Dimostrare che, per ogni numero pari n, α_n è confutabile e, per ogni numero dispari n, α_n è una tautologia.

Soluzione

- Costruiamo l'albero di confutazione per α_0.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & (A \to (B \vee C)) \wedge (A \to \neg B) \wedge \neg(A \to C) & & \\
 & & A \to (B \vee C), A \to \neg B, \neg(A \to C) & & \\
 & & A, \neg C & & \\
\neg A & & & B \vee C & \\
X & & B & & C \\
 & \neg A & & \neg B & X \\
 & X & & X &
\end{array}
$$

- Vediamo che non è possibile trovare una valutazione che falsifichi α_1. Infatti, affinchè α_1 sia valutata in falso bisogna che sia $A \to (B \vee C)$ che $(C \to A) \wedge (C \to \neg B)$ vengano valutati in falso e quindi A deve essere valutato in vero e $B \vee C$ in falso da cui segue che B e C devono essere valutati in falso. Ma allora sia $C \to A$ che $C \to \neg B$ vengono valutati in vero e quindi anche $(C \to A) \wedge (C \to \neg B)$ viene valutato in vero.

- La dimostrazione si può ottenere per induzione. Abbiamo già visto che, per $n = 0$, α_0 è confutabile e, per $n = 1$, α_1 è una tautologia. Supponiamo ora che $n = 2p$ sia un numero pari e analizziamo la formula $\alpha_{2p+2} \equiv \alpha_{2p+1} \to \alpha_{2p}$ supponendo per ipotesi induttiva che α_{2p+1} sia una tautologia e α_{2p} sia confutabile. Allora, per il teorema di completezza, $\neg\alpha_{2p+1}$ è confutabile e quindi abbiamo un albero di confutazione sia per $\neg\alpha_{2p+1}$ che per α_{2p} che possiamo combinare insieme per costruire un albero di confutazione per $\alpha_{2p+1} \to \alpha_{2p}$.

  Se supponiamo invece che $n = 2p + 1$ sia un numero dispari e analizziamo la formula $\alpha_{(2p+1)+2} \equiv \alpha_{2p+2} \to \alpha_{2p+1}$, supponendo per ipotesi induttiva che α_{2p+2} sia confutabile e α_{2p+1} sia una tautologia, otteniamo che anche $\alpha_{2p+2} \to \alpha_{2p+1}$ è una tautologia visto che il conseguente è vero in ogni interpretazione.

Esercizio 4
Dimostrare, utilizzando il metodo degli alberi predicativi, che la seguente formula è una verità logica

$$\exists x.((\forall y.A(x,y)) \to (\forall x.\exists z.A(x,z)))$$

Soluzione. Costruiamo dapprima l'albero di confutazione per

$$\exists x.((\forall y.A(x,y)) \to (\forall x.\exists z.A(x,z)))$$

$\neg\exists x.((\forall y.A(x,y)) \to (\forall x.\exists z.A(x,z)))$	
$\neg((\forall y.A(x,y)) \to (\forall x.\exists z.A(x,z)))$	x sostituito con x
$(\forall y.A(x,y)), \neg(\forall x.\exists z.A(x,z))$	
$A(x,y)$	y sostituito con y
$\neg\exists z.A(w,z)$	x sostituito con w nuova
$\neg A(w,z)$	z sostituito con z
$\neg((\forall y.A(w,y)) \to (\forall x.\exists z.A(x,z)))$	x sostituito con w
$(\forall y.A(w,y)), \neg(\forall x.\exists z.A(x,z))$	
$A(w,z)$	y sostituito con z
X	

Esercizio 5

Sia $f_1, f_2, f_3, \ldots$ una lista di tutte le funzioni calcolabili di un argomento. Sapendo che esiste una funzione calcolabile $k(x,y)$ tale che $f_x(z+y) = f_{k(x,y)}(z)$, dimostrare che non esiste nessuna funzione calcolabile che permetta di decidere se una funzione calcolabile quando applicata a 0 converge, dimostrare cioè che la funzione h definita ponendo

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f_x(0) \text{ converge} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è calcolabile. (*Sugg.*: si riduca il problema al problema dell'arresto, si mostri cioè che se h fosse calcolabile allora il problema dell'arresto sarebbe risolvibile in modo effettivo)

Soluzione. Dobbiamo far vedere che se h è una funzione calcolabile allora possiamo definire una funzione H tale che

$$H(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } f_x(y) \text{ converge} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A questo scopo possiamo porre

$$H(x,y) \equiv h(k(x,y))$$

Infatti

$$h(k(x,y)) = \begin{cases} 0 & \text{se } f_{k(x,y)}(0) \text{ converge sse } f_x(0+y) \text{ converge sse } f_x(y) \text{ converge} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 6
Si supponga che $\Phi \vdash \exists x.\, \alpha$. Dimostrare che esiste un insieme finito $\{t_1, \ldots, t_n\}$ di termini tali che $\Phi \vdash \alpha[x := t_1] \vee \ldots \vee \alpha[x := t_n]$. (*Sugg.:* tenere presente che ogni albero di confutazione è finito)

Soluzione. Dire che $\Phi \vdash \exists x.\, \alpha$ significa che l'insieme di formule $\Phi \cup \{\neg(\exists x.\, \alpha)\}$ é confutabile. Ma allora esiste per tale insieme un albero *finito* di confutazione e nella costruzione di tale albero la formula $\neg(\exists x.\, \alpha)$ sarà stata usata un numero finito n di volte istanziando la variabile x con i termini t_1, $\ldots$, t_n. Per chiudere l'albero ho quindi usato solo le formule $\neg\alpha[x := t_1]$, $\ldots$, $\neg\alpha[x := t_n]$ e quindi l'albero di confutazione per $\Phi \cup \{\neg(\exists x.\, \alpha)\}$ sarà anche un albero di confutazione per $\Phi \cup \{\neg\alpha[x := t_1], \ldots, \neg\alpha[x := t_n]\}$. Ma allora anche $\Phi \cup \{\neg(\alpha[x := t_1] \vee \ldots \vee \alpha[x := t_n])\}$ ha un albero di confutazione (lo stesso!) e quindi $\Phi \vdash \alpha[x := t_1] \vee \ldots \vee \alpha[x := t_n]$.