MATEMATICA DI BASE

ALGEBRA

15 novembre 2004

NOME e COGNOME in stampatello:

Esercizio 4

- Si risolva la seguente congruenza

$$2x \equiv 1 \bmod 3$$

  Soluzione. Visto che il massimo comun divisore tra 2 e 3 è 1 e che divide quindi 1, vale a dire il termine noto della congruenza, per un teorema nelle dispense sappiamo che la congruenza ammette esattamente una soluzione individuata da un numero intero e costituita da tutti i numeri interi ad esso congrui modulo 3. Tale soluzione sarà individuata da un numero intero x tale che $2x$ diviso per 3 abbia resto 1, vale a dire che $2x - 1$ si deve dividere per 3 e quindi $x = -1$ è un possibile valore. Ne segue che l'insieme delle soluzioni è $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = -1 + 3k, k \in \mathbb{Z}\}$.

- Per quali valori di n la congruenza

$$nx \equiv 1 \bmod 3$$

  ammette soluzioni?

  Soluzione. Affinchè la congruenza ammetta soluzione è necessario e sufficiente che il massimo comun divisore tra 3 e n divida 1, ma questo accade se e solo se 3 e n sono primi tra loro e quindi, visto che 3 è un numero primo, se e solo se n non è un multiplo di 3.

Esercizio 5

Sia data la funzione

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto 3x\overline{x} \end{aligned}$$

dove il simbolo $^-$ denota il complesso coniugato.

1. Dimostrare che l'immagine di g è contenuta in $\mathbb{R}$

   Soluzione. Sia $x = a + \mathrm{i}b$ un generico numero complesso dove $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $3x\overline{x} = 3(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = 3(a^2 - \mathrm{i}^2b^2) = 3(a^2 + b^2)$ ed è quindi un numero reale.

2. Dimostrare che g non è iniettiva.

   Soluzione. Per dimostrare che g non è iniettiva basta esibire due diversi numeri complessi x_1 e x_2 tali che $g(x_1) = g(x_2)$. Ad esempio, preso $x_1 = a + \mathrm{i}b$ e $x_2 = a - \mathrm{i}b$ otteniamo che $g(x_1) = 3(a^2 + b^2) = g(x_2)$.

3. È vero che l'immagine di g coincide con $\mathbb{R}$? Se si, fornire una dimostrazione, altrimenti, dare un controesempio.

   Soluzione. L'immagine di g non coincide con $\mathbb{R}$ visto che per ogni numero complesso $x = a + \mathrm{i}b$ abbiamo che $g(x) = 3(a^2 + b^2)$ ed è quindi sempre un numero maggiore o uguale a 0 e quindi qualsiasi numero negativo non appartiene all'immagine di g.

4. Calcolare $g(1 + 3i)$, $g(\overline{1 + 3i})$, e $|g(1 + 3i)|$.

   Soluzione.

   $g(1 + 3i) = 3(1^2 + 3^2) = 30$,

   $g(\overline{1 + 3i}) = g(1 - 3i) = 3(1^2 + 3^2) = 30$,

   $|g(1 + 3i)| = |3(1^2 + 3^2)| = |30| = 30$

Esercizio 6

Siano Y e Z due insiemi e si definisca

$$Y\Delta Z = \{y \in Y \mid y \notin Z\} \cup \{z \in Z \mid z \notin Y\}$$

Si dimostri che per ogni insieme X

$$X \cap (Y\Delta Z) = (X \cap Y)\Delta(X \cap Z)$$

Soluzione. Indichiamo con $Y - Z$ l'insieme di tutti gli elementi che stanno in Y ma non stanno in Z. Allora possiamo scrivere $Y\Delta Z$ come $(Y-Z)\cup(Z-Y)$ ed ottenere

$$\begin{array}{lll}
x \in X \cap (Y\Delta Z) & \text{sse} & x \in X \text{ e } x \in Y\Delta Z \\
 & \text{sse} & x \in X \text{ e } x \in (Y-Z) \cup (Z-Y) \\
 & \text{sse} & x \in X \text{ e } ((x \in Y-Z) \text{ o } (x \in Z-Y)) \\
 & \text{sse} & (x \in X \text{ e } x \in Y-Z) \text{ o } (x \in X \text{ e } x \in Z-Y) \\
 & \text{sse} & (x \in (X \cap Y) \text{ e } x \notin Z) \text{ o } (x \in (X \cap Z) \text{ e } x \notin Y) \\
 & \text{sse} & (x \in (X \cap Y) - Z) \text{ o } (x \in (X \cap Z) - Y) \\
 & \text{sse} & x \in ((X \cap Y) - Z) \cup ((X \cap Z) - Y) \\
 & \text{sse} & x \in (X \cap Y)\Delta(X \cap Z)
\end{array}$$

MATEMATICA DI BASE

ALGEBRA

15 novembre 2004

NOME e COGNOME in stampatello:

Esercizio 4

- Si risolva la seguente congruenza

$$4x \equiv 1 \bmod 5$$

Soluzione. Visto che il massimo comun divisore tra 4 e 5 è 1 e che divide quindi 1, vale a dire il termine noto della congruenza, per un teorema nelle dispense sappiamo che la congruenza ammette esattamente una soluzione individuata da un numero intero e costituita da tutti i numeri interi ad esso congrui modulo 5. Tale soluzione sarà individuata da un numero intero x tale che $4x$ diviso per 5 abbia resto 1, vale a dire che $4x - 1$ si deve dividere per 5 e quindi $x = -1$ è un possibile valore. Ne segue che l'insieme delle soluzioni è $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = -1 + 5k, k \in \mathbb{Z}\}$.

- Per quali valori di n la congruenza

$$nx \equiv 1 \bmod 5$$

ammette soluzioni?

Soluzione. Affinchè la congruenza ammetta soluzione è necessario e sufficiente che il massimo comun divisore tra 5 e n divida 1, ma questo accade se e solo se 5 e n sono primi tra loro e quindi, visto che 5 è un numero primo, se e solo se n non è un multiplo di 5.

Esercizio 5

Sia data la funzione

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto 5x\overline{x} \end{aligned}$$

dove il simbolo $^{-}$ denota il complesso coniugato.

1. Dimostrare che l'immagine di g è contenuta in $\mathbb{R}$

   Soluzione. Sia $x = a + \mathrm{i}b$ un generico numero complesso dove $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $5x\overline{x} = 5(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = 5(a^2 - \mathrm{i}^2b^2) = 5(a^2 + b^2)$ ed è quindi un numero reale.

2. Dimostrare che g non è iniettiva.

   Soluzione. Per dimostrare che g non è iniettiva basta esibire due diversi numeri complessi x_1 e x_2 tali che $g(x_1) = g(x_2)$. Ad esempio, preso $x_1 = a + \mathrm{i}b$ e $x_2 = a - \mathrm{i}b$ otteniamo che $g(x_1) = 5(a^2 + b^2) = g(x_2)$.

3. È vero che l'immagine di g coincide con $\mathbb{R}$? Se si, fornire una dimostrazione, altrimenti, dare un controesempio.

   Soluzione. L'immagine di g non coincide con $\mathbb{R}$ visto che per ogni numero complesso $x = a + \mathrm{i}b$ abbiamo che $g(x) = 5(a^2 + b^2)$ ed è quindi sempre un numero maggiore o uguale a 0 e quindi qualsiasi numero negativo non appartiene all'immagine di g.

4. Calcolare $g(1 + 5i)$, $g(\overline{1 + 5i})$, e $|g(1 + 5i)|$.

   Soluzione.

   $g(1 + 5i) = 5(1^2 + 5^2) = 130,$

   $g(\overline{1 + 5i}) = g(1 - 5i) = 5(1^2 + 5^2) = 130,$

   $|g(1 + 5i)| = |5(1^2 + 5^2)| = |130| = 130$

Esercizio 6

Siano Y e Z due insiemi e si definisca

$$Y\Delta Z = \{y \in Y \mid y \notin Z\} \cup \{z \in Z \mid z \notin Y\}$$

Si dimostri che per ogni insieme X

$$X\Delta(Y\Delta Z) = (X\Delta Y)\Delta Z$$

Soluzione. Si osservi che $x \notin Y\Delta Z$ se e solo se ($x \in Y$ e $x \in Z$) o ($x \notin Y$ e $x \notin Z$). Allora abbiamo

$$\begin{array}{lll}
x \in X\Delta(Y\Delta Z) & \text{sse} & x \in \{w \in X \mid w \notin Y\Delta Z\} \cup \{w \in Y\Delta Z \mid w \notin X\} \\
 & \text{sse} & (x \in X \text{ e } x \notin Y\Delta Z) \text{ o } (x \in Y\Delta Z \text{ e } x \notin X) \\
 & \text{sse} & ((x \in X \text{ e } ((x \in Y \text{ e } x \in Z) \text{ o } (x \notin Y \text{ e } x \notin Z))) \text{ o } \\
 & & ((x \in Y \text{ e } x \notin Z) \text{ o } (x \in Z \text{ e } x \notin Y) \text{ e } x \notin X) \\
 & \text{sse} & (x \in X \text{ e } x \in Y \text{ e } x \in Z) \text{ o } (x \in X \text{ e } x \notin Y \text{ e } x \notin Z) \text{ o } \\
 & & (x \notin X \text{ e } x \in Y \text{ e } x \notin Z) \text{ o } (x \notin X \text{ e } x \notin Y \text{ e } x \in Z) \\
 & \text{sse} & (((x \in X \text{ e } x \notin Y) \text{ o } (x \in Y \text{ e } x \notin X)) \text{ e } x \notin Z) \text{ o } \\
 & & ((x \in Z \text{ e } ((x \in X) \text{ e } (x \in Y)) \text{ o } (x \notin X \text{ e } x \notin Y)) \\
 & \text{sse} & (x \in X\Delta Y \text{ e } x \notin Z) \text{ o } (x \in Z \text{ e } x \notin X\Delta Y) \\
 & \text{sse} & x \in \{w \in X\Delta Y \mid w \notin Z\} \cup \{w \in Z \mid w \notin X\Delta Y\} \\
 & \text{sse} & x \in (X\Delta Y)\Delta Z
\end{array}$$

MATEMATICA DI BASE

ALGEBRA

15 novembre 2004

NOME e COGNOME in stampatello:

Esercizio 4

- Si risolva la seguente congruenza

$$6x \equiv 1 \bmod 7$$

Soluzione. Visto che il massimo comun divisore tra 6 e 7 è 1 e che divide quindi 1, vale a dire il termine noto della congruenza, per un teorema nelle dispense sappiamo che la congruenza ammette esattamente una soluzione individuata da un numero intero e costituita da tutti i numeri interi ad esso congrui modulo 7. Tale soluzione sarà individuata da un numero intero x tale che $6x$ diviso per 7 abbia resto 1, vale a dire che $6x - 1$ si deve dividere per 7 e quindi $x = -1$ è un possibile valore. Ne segue che l'insieme delle soluzioni è $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = -1 + 7k, k \in \mathbb{Z}\}$.

- Per quali valori di n la congruenza

$$nx \equiv 1 \bmod 7$$

ammette soluzioni?

Soluzione. Affinchè la congruenza ammetta soluzione è necessario e sufficiente che il massimo comun divisore tra 7 e n divida 1, ma questo accade se e solo se 7 e n sono primi tra loro e quindi, visto che 7 è un numero primo, se e solo se n non è un multiplo di 7.

Esercizio 5

Sia data la funzione

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto 7x\overline{x} \end{aligned}$$

dove il simbolo $^-$ denota il complesso coniugato.

1. Dimostrare che l'immagine di g è contenuta in $\mathbb{R}$

   Soluzione. Sia $x = a + \mathrm{i}b$ un generico numero complesso dove $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $7x\overline{x} = 7(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = 7(a^2 - \mathrm{i}^2 b^2) = 7(a^2 + b^2)$ ed è quindi un numero reale.

2. Dimostrare che g non è iniettiva.

   Soluzione. Per dimostrare che g non è iniettiva basta esibire due diversi numeri complessi x_1 e x_2 tali che $g(x_1) = g(x_2)$. Ad esempio, preso $x_1 = a + \mathrm{i}b$ e $x_2 = a - \mathrm{i}b$ otteniamo che $g(x_1) = 7(a^2 + b^2) = g(x_2)$.

3. È vero che l'immagine di g coincide con $\mathbb{R}$? Se si, fornire una dimostrazione, altrimenti, dare un controesempio.

   Soluzione. L'immagine di g non coincide con $\mathbb{R}$ visto che per ogni numero complesso $x = a + \mathrm{i}b$ abbiamo che $g(x) = 7(a^2 + b^2)$ ed è quindi sempre un numero maggiore o uguale a 0 e quindi qualsiasi numero negativo non appartiene all'immagine di g.

4. Calcolare $g(1 + 7i)$, $g(\overline{1 + 7i})$, e $|g(1 + 7i)|$.

   Soluzione.

   $g(1 + 7i) = 7(1^2 + 7^2) = 350$,

   $g(\overline{1 + 7i}) = g(1 - 7i) = 7(1^2 + 7^2) = 350$,

   $|g(1 + 7i)| = |7(1^2 + 7^2)| = |350| = 350$

Esercizio 6

Siano X e Y due insiemi e si definisca

$$X\Delta Y = \{x \in X \mid x \notin Y\} \cup \{y \in Y \mid y \notin X\}$$

Si dimostri che

$$X \cap (X\Delta Y) = \{x \in X \mid x \notin Y\}$$

Soluzione.

$$\begin{array}{lll} x \in X \cap (X\Delta Y) & \text{sse} & x \in X \text{ e } x \in X\Delta Y \\ & \text{sse} & x \in X \text{ e } ((x \in X \text{ e } x \notin Y) \text{ o } (x \in Y \text{ e } x \notin X)) \\ & \text{sse} & (x \in X \text{ e } x \in X \text{ e } x \notin Y) \text{ o } (x \in X \text{ e } x \in Y \text{ e } x \notin X)) \\ & \text{sse} & x \in X \text{ e } x \notin Y \\ & \text{sse} & x \in \{x \in X \mid x \notin Y\} \end{array}$$

MATEMATICA DI BASE

ALGEBRA

15 novembre 2004

NOME e COGNOME in stampatello:

Esercizio 4

- Si risolva la seguente congruenza

$$10x \equiv 1 \bmod 11$$

Soluzione. Visto che il massimo comun divisore tra 10 e 11 è 1 e che divide quindi 1, vale a dire il termine noto della congruenza, per un teorema nelle dispense sappiamo che la congruenza ammette esattamente una soluzione individuata da un numero intero e costituita da tutti i numeri interi ad esso congrui modulo 11. Tale soluzione sarà individuata da un numero intero x tale che $10x$ diviso per 11 abbia resto 1, vale a dire che $10x - 1$ si deve dividere per 11 e quindi $x = -1$ è un possibile valore. Ne segue che l'insieme delle soluzioni è $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = -1 + 11k, k \in \mathbb{Z}\}$.

- Per quali valori di n la congruenza

$$nx \equiv 1 \bmod 11$$

ammette soluzioni?

Soluzione. Affinchè la congruenza ammetta soluzione è necessario e sufficiente che il massimo comun divisore tra 11 e n divida 1, ma questo accade se e solo se 11 e n sono primi tra loro e quindi, visto che 11 è un numero primo, se e solo se n non è un multiplo di 11.

Esercizio 5

Sia data la funzione

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto 11x\overline{x} \end{aligned}$$

dove il simbolo $^{-}$ denota il complesso coniugato.

1. Dimostrare che l'immagine di g è contenuta in $\mathbb{R}$

   Soluzione. Sia $x = a + \mathrm{i}b$ un generico numero complesso dove $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $11x\overline{x} = 11(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = 11(a^2 - \mathrm{i}^2 b^2) = 11(a^2 + b^2)$ ed è quindi un numero reale.

2. Dimostrare che g non è iniettiva.

   Soluzione. Per dimostrare che g non è iniettiva basta esibire due diversi numeri complessi x_1 e x_2 tali che $g(x_1) = g(x_2)$. Ad esempio, preso $x_1 = a + \mathrm{i}b$ e $x_2 = a - \mathrm{i}b$ otteniamo che $g(x_1) = 11(a^2 + b^2) = g(x_2)$.

3. È vero che l'immagine di g coincide con $\mathbb{R}$? Se si, fornire una dimostrazione, altrimenti, dare un controesempio.

   Soluzione. L'immagine di g non coincide con $\mathbb{R}$ visto che per ogni numero complesso $x = a + \mathrm{i}b$ abbiamo che $g(x) = 11(a^2 + b^2)$ ed è quindi sempre un numero maggiore o uguale a 0 e quindi qualsiasi numero negativo non appartiene all'immagine di g.

4. Calcolare $g(1 + 11i)$, $g(\overline{1 + 11i})$, e $|g(1 + 11i)|$.

   Soluzione.

   $g(1 + 11i) = 11(1^2 + 11^2) = 1342$,

   $g(\overline{1 + 11i}) = g(1 - 11i) = 11(1^2 + 11^2) = 1342$,

   $|g(1 + 11i)| = |11(1^2 + 11^2)| = |1342| = 1342$

Esercizio 6

Siano X e Y due insiemi e si definisca

$$X\Delta Y = \{x \in X \mid x \notin Y\} \cup \{y \in Y \mid y \notin X\}$$

Si dimostri che

$$(X \cap Y) \cup (X\Delta Y) = X \cup Y$$

Soluzione.

$$\begin{array}{lll} x \in (X \cap Y) \cup (X\Delta Y) & \text{sse} & x \in X \cap Y \text{ o } x \in X\Delta Y \\ & \text{sse} & (x \in X \text{ e } x \in Y) \text{ o} \\ & & (x \in X \text{ e } x \notin Y) \text{ o } (x \in Y \text{ e } x \notin X) \\ & \text{sse} & ((x \in X \text{ e } x \in Y) \text{ o } (x \in X \text{ e } x \notin Y)) \text{ o} \\ & & ((x \in X \text{ e } x \in Y) \text{ o } (x \in Y \text{ e } x \notin X)) \\ & \text{sse} & x \in X \text{ o } x \in Y \\ & \text{sse} & x \in X \cup Y \end{array}$$