MATEMATICA DI BASE

ALGEBRA

15 dicembre 2004

NOME e COGNOME in stampatello:

Esercizio 4

Si determini se la seguente congruenza

$$4x \equiv 2 \bmod 10$$

ammette soluzioni e, nel caso positivo, le si calcoli.

Soluzione. Visto che il massimo comun divisore tra 4 e 10 è 2 e che divide quindi 2, vale a dire il termine noto della congruenza, per un teorema nelle dispense sappiamo che la congruenza ammette esattamente due soluzioni individuate da due numeri interi e costituite da tutti i numeri interi ad essi congrui modulo 10. Tali soluzioni saranno individuate da una coppia di numeri interi x, non congrui tra loro modulo 10, e tali che $4x$ diviso per 10 abbia resto 2, vale a dire che $4x - 2$ si deve dividere per 10. I possibili valori sono quindi $x = 3$ e $x = 8$. Ne segue che l'insieme delle soluzioni è $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3 + 10k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 8 + 10k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 5

Sia f una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ definita ricorsivamente nel modo che segue

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f(n+1) & = & 2 \cdot \sum_{i=0,\ldots,n} f(i) \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, $f(n) = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Soluzione. Come ogni dimostrazione per induzione anche questa richiederà di provare due cose.

- (Base) Dobbiamo dimostrare che $f(1) = 2 \cdot 3^{1-1}$. Allora abbiamo

$$f(1) = 2 \cdot \sum_{i=0,\ldots,0} f(i) = 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 1 = 2 \cdot 3^{1-1}$$

- (Passo) Dobbiamo dimostrare che $f(n+1) = 2 \cdot 3^{(n+1)-1}$ supponendo che $f(n) = 2 \cdot 3^{n-1}$.

$$\begin{array}{rcl} f(n+1) & = & 2 \cdot \sum_{i=0,\ldots,n} f(i) \\ & = & 2 \cdot \sum_{i=0,\ldots,n-1} f(i) + 2 \cdot f(n) \\ \text{per def.} & = & f(n) + 2 \cdot f(n) \\ & = & 3 \cdot f(n) \\ \text{per ip. ind.} & = & 3 \cdot 2 \cdot 3^{n-1} \\ & = & 2 \cdot 3^{n-1+1} \\ & = & 2 \cdot 3^{(n+1)-1} \end{array}$$

Esercizio 6

Sia $f : X \to Y$ una funzione dall'insieme X all'insieme Y. Ricordando che, dato un sottoinsieme U di X, si ha che $f(U) = \{f(x) \in Y \mid x \in U\}$ e che, dato un sottoinsieme V di Y, si ha che $f^{-}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$, dimostrare i seguenti punti:

- Per ogni sottoinsieme U di X, $U \subseteq f^{-}(f(U))$.

  Soluzione. Supponiamo che x sia un elemento di U. Allora $f(x) \in f(U)$ e quindi $f^{-}(f(x)) \subseteq f^{-}(f(U))$. Ma $x \in f^{-}(f(x))$ e quindi $x \in f^{-}(f(U))$.

- Se f è iniettiva, allora, per ogni sottoinsieme U di X, $U = f^{-}(f(U))$.

  Soluzione. Visto il punto precedente, basta dimostrare che $f^{-}(f(U)) \subseteq U$. Supponiamo allora che $x \in f^{-}(f(U))$. Quindi $f(x) \in f(U)$. Ma allora esiste $y \in U$ that che $f(y) = f(x)$ e quindi se f è iniettiva, $y = x$ e perciò $x \in U$.

- Se, per ogni sottoinsieme U di X, $U = f^{-}(f(U))$ allora f è iniettiva.

  Soluzione. Se, per ogni sottoinsieme U di X, $U = f^{-}(f(U))$ allora in particolare, per ogni $x \in X$, $\{x\} = f^{-}(f(\{x\})) = f^{-}(f(x))$. Quindi, se $f(x) = f(y)$ allora $f^{-}(f(x)) = f^{-}(f(y))$ e quindi $\{x\} = f^{-}(f(x)) = f^{-}(f(y)) = \{y\}$ che implica che $x = y$. Abbiamo quindi dimostrato che f è iniettiva.

MATEMATICA DI BASE

ALGEBRA

15 dicembre 2004

NOME e COGNOME in stampatello:

Esercizio 4

Si determini se la seguente congruenza

$$4x \equiv 6 \bmod 10$$

ammette soluzioni e, nel caso positivo, le si calcoli.

Soluzione. Visto che il massimo comun divisore tra 4 e 10 è 2 e che divide quindi 6, vale a dire il termine noto della congruenza, per un teorema nelle dispense sappiamo che la congruenza ammette esattamente due soluzioni individuate da due numeri interi e costituite da tutti i numeri interi ad essi congrui modulo 10. Tali soluzioni saranno individuate da una coppia di numeri interi x, non congrui tra loro modulo 10, e tali che $4x$ diviso per 10 abbia resto 6, vale a dire che $4x - 6$ si deve dividere per 10. I possibili valori sono quindi $x = 4$ e $x = 9$. Ne segue che l'insieme delle soluzioni è $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4 + 10k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 9 + 10k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 5

Sia f una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ definita ricorsivamente nel modo che segue

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f(n+1) & = & 3 \cdot \sum_{i=0,\dots,n} f(i) \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, $f(n) = 3 \cdot 4^{n-1}$.

Soluzione. Come ogni dimostrazione per induzione anche questa richiederà di provare due cose.

- (Base) Dobbiamo dimostrare che $f(1) = 3 \cdot 4^{1-1}$. Allora abbiamo

$$f(1) = 3 \cdot \sum_{i=0,\dots,0} f(i) = 3 \cdot f(0) = 3 \cdot 1 = 3 \cdot 4^{1-1}$$

- (Passo) Dobbiamo dimostrare che $f(n+1) = 3 \cdot 4^{(n+1)-1}$ supponendo che $f(n) = 3 \cdot 4^{n-1}$.

$$\begin{array}{rcl} f(n+1) & = & 3 \cdot \sum_{i=0,\dots,n} f(i) \\ & = & 3 \cdot \sum_{i=0,\dots,n-1} f(i) + 3 \cdot f(n) \\ \text{per def.} & = & f(n) + 3 \cdot f(n) \\ & = & 4 \cdot f(n) \\ \text{per ip. ind.} & = & 4 \cdot 3 \cdot 4^{n-1} \\ & = & 3 \cdot 4^{n-1+1} \\ & = & 3 \cdot 4^{(n+1)-1} \end{array}$$

Esercizio 6

Sia $f : X \to Y$ una funzione dall'insieme X all'insieme Y. Ricordando che, dato un sottoinsieme U di X, si ha che $f(U) = \{f(x) \in Y \mid x \in U\}$ e che, dato un sottoinsieme V di Y, si ha che $f^{-}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$, dimostrare i seguenti punti:

- Per ogni sottoinsieme V di Y, $f(f^{-}(V)) \subseteq V$.

  Soluzione. Supponiamo che $y \in f(f^{-}(V))$. Quindi esiste $x \in f^{-}(V)$ tale che $y = f(x)$. Ma allora $f(x) \in V$ e quindi $y \in V$.

- Se f è suriettiva, allora, per ogni sottoinsieme V di Y, $f(f^{-}(V)) = V$.

  Soluzione. Visto il punto precedente basta dimostrare che $V \subseteq f(f^{-}(V))$. Supponiamo allora che $y \in V$. Quindi, se f è suriettiva, esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Ma allora $x \in f^{-}(V)$ e quindi $f(x) \in f(f^{-}(V))$ cioè $y \in f(f^{-}(V))$.

- Se, per ogni sottoinsieme V di Y, $f(f^{-}(V)) = V$ allora f è suriettiva.

  Soluzione. Se, per ogni sottoinsieme V di Y, $f(f^{-}(V)) = V$ allora in particolare se consideriamo il caso che V sia Y otteniamo $f(f^{-}(Y)) = Y$ cioè Y è immagine di un sottoinsieme di X e la funzione è quindi sicuramente suriettiva.