COMPITO di LOGICA PER INFORMATICA (fila 1)
24 giugno 2005

Nome: Matricola:

Esercizio 1.1
Si dimostri che la seguente regola logica è valida, vale a dire, si dimostri che se la premessa è vera in ogni struttura allora anche la conclusione lo è:

$$\frac{B \to A(x)}{B \to \forall x.A(x)}$$

dove la variabile x non appare libera in B (sugg.: si dimostri che se esiste una interpretazione che falsifica la conclusione allora esiste anche una interpretazione che falsifica la premessa)
Verificare poi che la seguente ne è una istanza corretta:

$$\frac{((z)\ \to (((y)\ Q)(z))(P(z)))(x)}{((y)\ Q)(x) \to \forall(P)}$$

dove Q è una costante di arietà 0, x, y, z sono variabili di arietà 0 e P è una costante di arietà $0 \to 0$.
Soluzione. Verifichiamo prima che quella considerata è una regola valida. Seguendo il suggerimento, supponiamo che esista una struttura su un insieme U ed una interpretazione σ su tale struttura che falsifichi la conclusione della regola, cioè tale che

$$(B \to \forall x.A(x))^\sigma = \bot$$

ma questo accade se e solo se

$$\begin{array}{lll}
(B \to \forall x.A(x))^\sigma = \bot & \text{sse} & (B)^\sigma = \top \text{ e } (\forall x.A(x))^\sigma = \bot \\
 & \text{sse} & (B)^\sigma = \top \text{ e esiste } u \in U \text{ tale che} (A(x))^{\sigma(x/u)} = \bot \\
x \notin \mathsf{VF}(B) & \text{sse} & \text{esiste } u \in U \text{ tale che } (B)^{\sigma(x/u)} = \top \text{ e } (A(x))^{\sigma(x/u)} = \bot \\
 & \text{sse} & \text{esiste } u \in U \text{ tale che } (B \to A(x))^{\sigma(x/u)} = \bot
\end{array}$$

e quindi la stessa struttura falsificherebbe la premessa della regola utilizzando però invece dell'interpretazione σ la nuova interpretazione $\sigma(x/u)$.
Ora, il modo più veloce di risolvere la seconda parte dell'esercizio consiste nel trovare forma normale delle espressioni coinvolte. La premessa della regola diviene quindi $\to (Q)(P(x))$ che indica immediatamente che per ottenere una corrispondenza con la regola considerata deve essere che $B \equiv Q$ e $A \equiv P$. É allora chiaro che il nostro B non dipende da x. Ci manca quindi solo da verificare che ci sia corrispondenza anche con la conclusione, ma anche in questo caso basta calcolarne la forma normale visto che questa è $\to (Q)(\forall((w)P(w))$ che coincide quindi con quella desiderata a meno dei nomi delle variabile astratte.

Esercizio 1.2
Si stabilisca se il seguente insieme di formule è soddisfacibile

$$\{A \to \exists x.(P(x) \to \forall x.P(x)), \exists x.(P(x) \to \forall x.P(x)) \to C, \neg C\}$$

Soluzione. La soluzione più veloce per dimostrare che l'insime considerato non è soddisfacibile consiste nell'osservare che per rendere vera l'ultima formula è necessario interpretare C in falso, ma allora per rendere vera la seconda formula bisognerebbe che fosse possibile interpretare in falso la formula $\exists x.(P(x) \to \forall x.P(x))$ ma questo non è possibile in quanto essa è una verità logica e quindi è vera in ogni struttura. Possiamo verificarlo facendo vedere che l'insieme

$$\{\neg\exists x.(P(x) \to \forall x.P(x))\}$$

non è soddisfacibile utilizando il metodo di risoluzione. Il primo passo consiste quindi nel trasformare l'insieme considerato nel seguente insieme di clausole (secondo la nostra abitudine non scriviemo i quantificatori universali)

$$\{P(x), \neg P(a)\}$$

che produce immediatamente la clausola vuota.

Esercizio 1.3
Si formalizzino le seguenti affermazioni:

- Un uomo è di destra se tutti i suoi veri amici sono ricchi
- Ogni milionario è ricco
- Un uomo è un milionario se c'è un milionario che gli è vero amico

(Sugg. Si utilizzino i seguenti predicati: $D(x) \equiv x$ è di destra, $A(x, y) \equiv\ y$ è un vero amico di x, $R(x) \equiv\ x$ è ricco, $M(x) \equiv\ x$ è un milionario)
Si fornisca quindi una dimostrazione sintattica del fatto che tutti i milionari sono di destra.
Soluzione. L'esercizio richiede prima di scrivere formalmente le quattro affermazioni in italiano e poi di fare una prova formale che quarta è una conseguenza sintattica delle prime tre. Cominciamo quindi in ordine. La prima affermazione diventa la formula

$$(1) \quad \forall x.(\forall y.A(y, x) \to R(y)) \to D(x)$$

la seconda diventa

$$(2) \quad \forall x.M(x) \to R(x)$$

mentre la terza diventa

$$(3) \quad \forall x.(\exists y.M(y) \land A(x, y)) \to M(x)$$

Infine la conclusione diventa

$$(4) \quad \forall x.M(x) \to D(x)$$

Dobbiamo allora dimostrare che $(1), (2), (3) \vDash (4)$ o, equivalentemente, che il seguente insieme di formule è insoddisfacibile $\{(1), (2), (3), \neg(4)\}$ e possiamo ottenere questo risultato usando il metodo di risoluzione. Dopo l'opportuna trasformazione sintattica ci ritroviamo nella situazione di dover dimostrare che il seguente insieme di clausole è insoddisfacibile (secondo la nostra abitudine non abbiamo scritto i quantificatori universali nelle clausole risultanti):

$$\begin{array}{ll}
(1) & \{A(f(x), x) \lor D(x), \\
(2) & \neg R(f(x)) \lor D(x), \\
(3) & \neg M(x) \lor R(x), \\
(4) & \neg M(y) \lor \neg A(x, y) \lor M(x), \\
(5) & M(a) \\
(6) & \neg D(a)\}
\end{array}$$

Per produrre la clausola vuota possiamo ora procedere come segue

$$\begin{array}{ll}
\neg D(a) & \text{clausola 6} \\
A(f(a), a) & \text{clausola 1} \\
\neg M(a) \lor M(f(a)) & \text{clausola 4} \\
M(f(a)) & \text{clausola 5} \\
R(f(a)) & \text{clausola 3} \\
D(a) & \text{clausola 2} \\
\Box & \text{clausola 6}
\end{array}$$

Esercizio 1.4
Scrivere il programma ricorsivo che calcola (vale a dire, che dà il nome) alla funzione calcolabile f che dato un numero naturale n fornisce la somma di tutti i numeri dispari minori o uguali ad n (Sugg. Si dia per scontato di saper dare un nome a somma e prodotto e si costruiscano prima la funzione caratteristica d dei numeri dispari che vale 1 se x è dispari e 0 altrimenti e la funzione $\mathsf{if}\ \mathsf{d}(x)\ \mathsf{then}\ g(x)\ \mathsf{else}\ k(x)$).

Soluzione. Iniziamo ricordando che le funzioni somma, prodotto, predecessore e differenza si possono definire utilizzando rispettivamente i seguenti schemi ricorsivi:

$$\begin{cases} +(0,y) & = & y & \equiv & \mathsf{P}^1_1(y) \\ +(x+1,y) & = & +(x,y)+1 & \equiv & \mathsf{C}^3[\mathsf{S}^1,\mathsf{P}^3_3](x,y,+(x,y)) \end{cases}$$

e quindi $+ \equiv \mathsf{R}^2[\mathsf{P}^1_1,\mathsf{C}^3[\mathsf{S}^1,\mathsf{P}^3_3]]$

$$\begin{cases} \times(0,y) & = & 0 & \equiv & \mathsf{Z}^1(y) \\ \times(x+1,y) & = & +(y,\times(x,y)) & \equiv & \mathsf{C}[+,\mathsf{P}^3_2,\mathsf{P}^3_3](x,y,\times(x,y)) \end{cases}$$

e quindi $\times \equiv \mathsf{R}^2[\mathsf{Z}^1,\mathsf{C}[+,\mathsf{P}^3_2,\mathsf{P}^3_3]]$

$$\begin{cases} \mathsf{Pr}(0) & = & 0 & \equiv & \mathsf{M}^0[\mathsf{Z}^1] \\ \mathsf{Pr}(x+1) & = & x & \equiv & \mathsf{P}^2_1(x,\mathsf{Pr}(x)) \end{cases}$$

e quindi $\mathsf{Pr} \equiv \mathsf{R}^1[\mathsf{M}^0[\mathsf{Z}^1],\mathsf{P}^2_1]$

$$\begin{cases} -(0,y) & = & y & \equiv & \mathsf{P}^1_1(y) \\ -(x+1,y) & = & \mathsf{Pr}(-(x,y)) & \equiv & \mathsf{C}^3[\mathsf{Pr}^1,\mathsf{P}^3_3](x,y,-(x,y)) \end{cases}$$

e quindi $- \equiv \mathsf{R}^2[\mathsf{P}^1_1,\mathsf{C}^3[\mathsf{Pr}^1,\mathsf{P}^3_3]]$ (si osservi che con $-(x,y)$ indichiamo la funzione che di solito andrebbe scritta come $y-x$).
Possiamo ora scrivere il programma richiesto dall'esercizio. Cominciamo con la definizione della funzione d

$$\begin{cases} \mathsf{d}(0) & = & 0 & \equiv & \mathsf{M}^0[\mathsf{Z}^1] \\ \mathsf{d}(x+1) & = & -(\mathsf{d}(x),1) & \equiv & \mathsf{C}^2[-,\mathsf{P}^2_2,\mathsf{C}^2[\mathsf{S}^1,\mathsf{C}^2[\mathsf{Z}^1,\mathsf{P}^2_1]]](x,\mathsf{d}(x)) \end{cases}$$

e quindi $\mathsf{d} \equiv \mathsf{R}[\mathsf{M}^0[\mathsf{Z}^1],\mathsf{C}^2[-,\mathsf{P}^2_2,\mathsf{C}^2[\mathsf{S}^1,\mathsf{C}^2[\mathsf{Z}^1,\mathsf{P}^2_1]]]]$.
Definiamo ora una funzione g tale che $\mathsf{g}(x)$ valga 0 se x è pari e valga x se x è dispari; per ottenerla basta porre

$$\mathsf{g}(x) \equiv \mathsf{d}(x) \times x$$

e quindi $\mathsf{g} \equiv \mathsf{C}^1[\times,\mathsf{C}^1[\mathsf{d},\mathsf{P}^1_1],\mathsf{P}^1_1]$
La funzione da noi desiderata è quindi la seguente

$$\begin{cases} \mathsf{f}(0) & = & 0 & \equiv & \mathsf{M}^0[\mathsf{Z}^1] \\ \mathsf{f}(x+1) & = & +(\mathsf{g}(x+1),\mathsf{f}(x)) & \equiv & \mathsf{C}^2[+,\mathsf{C}^2[\mathsf{g}^1,\mathsf{C}^2[\mathsf{S}^1,\mathsf{P}^2_1]],\mathsf{P}^2_2](x,\mathsf{f}(x)) \end{cases}$$

e quindi $\mathsf{f} \equiv \mathsf{R}[\mathsf{M}^0[\mathsf{Z}^1],\mathsf{C}^2[+,\mathsf{C}^2[\mathsf{g}^1,\mathsf{C}^2[\mathsf{S}^1,\mathsf{P}^2_1]],\mathsf{P}^2_2]]$

COMPITO di LOGICA PER INFORMATICA (fila 2)
24 giugno 2005

Nome: Matricola:

Esercizio 2.1
Si dimostri che la seguente regola logica è valida, vale a dire, si dimostri che se la premessa è vera in ogni struttura allora anche la conclusione lo è:

$$\frac{A(x) \to B}{\exists x.A(x) \to B}$$

dove la variabile x non appare libera in B (sugg.: si dimostri che se esiste una interpretazione che falsifica la conclusione allora esiste anche una interpretazione che falsifica la premessa)
Verificare poi che la seguente ne è una istanza corretta:

$$\frac{((z) \ \to (P(z))((y)\ Q)(z))(x)}{\exists(P) \to ((y)\ Q)(x)}$$

dove Q è una costante di arietà 0, x, y, z sono variabili di arietà 0 e P è una costante di arietà $0 \to 0$.

Esercizio 2.2
Si stabilisca se il seguente insieme di formule è soddisfacibile

$$\{A \to \forall x.(P(x) \wedge \exists x.\neg P(x)), \forall x.(P(x) \wedge \exists x.\neg P(x)) \to C, A\}$$

Esercizio 2.3
Si formalizzino le seguenti affermazioni:

- Tutti quelli che hanno gli occhi azzurri hanno almeno un antenato finlandese
- Tutti i finlandesi sono biondi
- Tutti i discendenti di un biondo sono biondi

(Sugg. Si utilizzino i seguenti predicati: $O(x) \equiv x$ ha gli occhi azzurri, $A(x, y) \equiv\ x$ è un antenato di y, $F(x) \equiv\ x$ è finlandese, $B(x) \equiv\ x$ è biondo)
Si fornisca quindi una dimostrazione sintattica del fatto che tutti quelli che hanno gli occhi azzurri sono biondi.

Esercizio 2.4
Scrivere il programma ricorsivo che calcola (vale a dire, che dà il nome) alla funzione calcolabile f che dato un numero naturale n fornisce la somma di tutti i numeri pari minori o uguali ad n (Sugg. Si dia per scontato di saper dare un nome a somma e prodotto e si costruiscano prima la funzione caratteristica p dei numeri pari che vale 1 se x è pari e 0 altrimenti e la funzione $\mathsf{if}\ p(x)\ \mathsf{then}\ g(x)\ \mathsf{else}\ k(x)$).