COMPITO di LOGICA PER INFORMATICA (fila 1)
14 luglio 2005

Nome: Matricola:

Esercizio 1.1
Si fornisca una arietà per la seguente espressione

$$((w)((y)((x)\ y(w(y)(x)))))$$

Soluzione. L'espressione considerata è una astrazione e quindi la sua arietà deve essere della forma $\alpha_1 \to \alpha_2$ per una opportuna scelta di α_1, che deve essere l'arietà di w, e α_2 che deve essere l'arietà di $((y)((x)\ y(w(y)(x))))$. Quindi α_2 deve essere della forma $\beta_1 \to \beta_2$ dove β_1 è l'arietà di y e β_2 è l'arietà di $((x)\ y(w(y)(x)))$. Perciò β_2 deve essere della forma $\gamma_1 \to \gamma_2$ dove γ_1 deve essere l'arietà di x e γ_2 quella di $y(w(y)(x))$.
Quindi l'arietà di y deve essere $\delta \to \gamma_2$ dove δ deve essere l'arietà di $w(y)(x)$. Perciò $w(y)$ deve avere arietà $\epsilon \to \delta$ dove ϵ è l'arietà di x. Così w dovrà avere arietà $\tau \to (\epsilon \to \delta)$ dove τ è l'arietà di y.
Mettendo assieme tutto quello che abbiamo scoperto otteniamo che

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_1 & \equiv & \tau \to (\epsilon \to \delta) \\
\alpha_2 & \equiv & \beta_1 \to \beta_2 \\
\beta_1 & \equiv & \delta \to \gamma_2 \\
\beta_2 & \equiv & \gamma_1 \to \gamma_2 \\
\gamma_1 & \equiv & \epsilon \\
\tau & \equiv & \delta \to \gamma_2
\end{array}$$

per cui una arietà per la nostra espressione è

$$((\delta \to \gamma_2) \to (\epsilon \to \delta)) \to ((\delta \to \gamma_2) \to (\epsilon \to \gamma_2))$$

dove δ, γ_2 e ϵ sono arietà arbitrarie.

Esercizio 1.2
Sia S un insieme di formule proposizionali. Dimostrare che $S \cup \{B \to (A_1 \vee A_2)\}$ è non soddisfacibile se e solo se $S_1 \equiv S \cup \{B \to A_1\}$ e $S_2 \equiv S \cup \{B \to A_2\}$ sono non soddisfacibili.

Soluzione. Supponiamo che $S \cup \{B \to (A_1 \vee A_2)\}$ non sia soddisfacibile. Allora, presa una qualsiasi valutazione proposizionale σ sappiamo che almeno una delle formule in $S \cup \{B \to (A_1 \vee A_2)\}$ non è interpretata in vero da σ. Se si tratta di una formula in S allora chiaramente ne $S_1 \equiv S \cup \{B \to A_1\}$ ne $S_2 \equiv S \cup \{B \to A_2\}$ sono soddisfatti da σ. D'altra parte, se $\sigma(B \to (A_1 \vee A_2)) = \bot$ allora $\sigma(B) = \top$ e $\sigma(A_1 \vee A_2) = \bot$ e quindi $\sigma(A_1) = \bot$ e $\sigma(A_2) = \bot$. Perciò sia $\sigma(B \to A_1) = \bot$ che $\sigma(B \to A_2) = \bot$ e quindi σ non soddisfa ne $S_1 \equiv S \cup \{B \to A_1\}$ ne $S_2 \equiv S \cup \{B \to A_2\}$.
Per dimostrare l'altra implicazione, supponiamo che $S \cup \{B \to (A_1 \vee A_2)\}$ sia soddisfacibile. Allora, per definizione, esiste una interpretazione proposizionale σ tale che tutte le formule in $S \cup \{B \to (A_1 \vee A_2)\}$ sono interpretate in vero da σ. Dimostriamo allora che la stessa interpretazione σ interpreta in vero anche tutte le formule in $S_1 \equiv S \cup \{B \to A_1\}$ o tutte quelle in $S_2 \equiv S \cup \{B \to A_2\}$ e quindi almeno uno di questi insiemi è soddisfacibile. Prima di tutto notiamo che tutte le formule in S sono interpretate in vero da σ. Poi, sappiamo che vale $\sigma(B \to (A_1 \vee A_2)) = \top$ e quindi o $\sigma(B) = \bot$, che implica sia $\sigma(B \to A_1) = \top$ che $\sigma(B \to A_2) = \top$, o $\sigma(A_1 \vee A_2) = \top$, vale a dire che $\sigma(A_1) = \top$ oppure $\sigma(A_2) = \top$ e quindi o $\sigma(B \to A_1) = \top$ o $\sigma(B \to A_2) = \top$, e quindi in tutti i casi o σ rende vere tutte le formule in S_1 o tutte le formule in S_2.

Esercizio 1.3
Sia R una relazione binaria. Si formalizzino le seguenti affermazioni:

- R è transitiva.
- Ogni elemento ha almeno un R-successore.
- Dati tre elementi qualsiasi almeno due tra loro non sono in relazione.

Si fornisca quindi una dimostrazione sintattica del fatto che non esiste nessuna relazione che soddisfa tutte queste condizioni.

Soluzione. Una possibile formalizzazione delle tre affermazioni è la seguente:

- "R è transitiva" diventa
$$\forall x.\forall y.\forall z.\ (R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z)$$
- "Ogni elemento ha almeno un R-successore" diventa
$$\forall x.\exists y.\ R(x,y)$$
- "Dati tre elementi qualsiasi almeno due tra loro non sono in relazione" diventa
$$\forall x.\forall y.\forall z.\neg R(x,y) \vee \neg R(x,z) \vee \neg R(y,z)$$

L'esercizio richiede quindi di dimostrare che l'insieme di queste formule non è soddisfacibile. Se operiamo la trasformazione richiesta per portare tali formule in forma di clausole otteniamo quindi il seguente insieme di clausole in cui, come al solito, non scriviamo i quantificatori universali,

$$\begin{array}{ll} (1) & \{\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z), \\ (2) & \ R(x,f(x)) \\ (3) & \ \neg R(x,y) \vee \neg R(x,z) \vee \neg R(y,z)\} \end{array}$$

di cui dobbiamo dimostrare la non soddisfacibilità in un universo di Herbrand che considera i seguenti elementi $\{a, f(a), f^2(a), f^3(a), \ldots\}$. Per farlo possiamo usare il metodo di risoluzione nel modo seguente

$\neg R(a,f(a)) \vee \neg R(a,f^2(a)) \vee \neg R(f(a),f^2(a))$	istanza di (3) con $x \equiv a$, $y \equiv f(a)$ e $z \equiv f^2(a)$
$\neg R(a,f(a)) \vee \neg R(f(a),f^2(a))$	risoluzione con istanza di (1) con $x \equiv a$, $y \equiv f(a)$ e $z \equiv f^2(a)$
$\neg R(f(a),f^2(a))$	risoluzione con istanza di (2) con $x \equiv a$
$\square$	risoluzione con istanza di (2) con $x \equiv f(a)$

Esercizio 1.4
Dimostrare che se
$$\{\alpha_1 \to \beta_1, \ldots, \alpha_n \to \beta_n, \ldots\} \models \gamma$$
allora esiste un numero naturale n tale che
$$\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \models \gamma$$
(Sugg.: si utilizzi il teorema di compattezza)

Soluzione. Se
$$\{\alpha_1 \to \beta_1, \ldots, \alpha_n \to \beta_n, \ldots\} \models \gamma$$
allora l'insieme
$$S \equiv \{\neg\gamma, \alpha_1 \to \beta_1, \ldots, \alpha_n \to \beta_n, \ldots\}$$
è non soddisfacibile. Quindi per il teorema di compattezza esiste un suo sottoinsieme finito S_0 che è pure non soddisfacibile.
Possiamo quindi trovare un sottoinsieme finito di S
$$S_1 \equiv \{\neg\gamma, \alpha_1 \to \beta_1, \ldots, \alpha_n \to \beta_n\}$$
che è pure non soddisfacibile in quanto sovrainsieme di S_0, dove l'indice n è il massimo indice per una formula della forma $\alpha_i \to \beta_i$ che compare in S_0.
Ma allora una qualsiasi interpretazione σ non rende vere tutte le formule in S_1 e quindi o falsifica $\neg\gamma$ oppure falsifica almeno una delle formule della forma $\alpha_i \to \beta_i$, vale a dire che $\sigma(\alpha_i \to \beta_i) = \bot$, cioè $\sigma(\alpha_i) = \top$ e $\sigma(\beta_i) = \bot$. Quindi, in ogni caso l'insieme
$$\{\neg\gamma, \beta_1, \ldots, \beta_n\}$$
non è soddisfatto da σ. Visto che questo ragionamento non dipende dalla particolare interpretazione considerata ne segue che l'insieme
$$\{\neg\gamma, \beta_1, \ldots, \beta_n\}$$
non è soddisfacibile e quindi
$$\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \models \gamma$$

COMPITO di LOGICA PER INFORMATICA (fila 2)
14 luglio 2005

Nome: Matricola:

Esercizio 2.1
Si fornisca una arietà per la seguente espressione

$$((w)((x)((y)\ y(x(y)(w)))))$$

Esercizio 2.2
Sia S un insieme di formule proposizionali. Dimostrare che $S \cup \{(B_1 \wedge B_2) \to A\}$ è soddisfacibile se e solo se $S_1 \equiv S \cup \{B_1 \to A\}$ è soddisfacibile o $S_2 \equiv S \cup \{B_2 \to A\}$ è soddisfacibile.

Esercizio 2.3
Sia R una relazione binaria. Si formalizzino le seguenti affermazioni:

- R è transitiva.
- Ogni elemento ha almeno un R-successore.
- R è simmetrica
- R non è riflessiva

Si fornisca quindi una dimostrazione sintattica del fatto che non esiste nessuna relazione che soddisfa tutte queste condizioni.

Esercizio 2.4
Dimostrare che se

$$\{\alpha_1 \to \beta_1, \ldots, \alpha_n \to \beta_n, \ldots\} \models \gamma$$

allora esiste un numero naturale n tale che

$$\{\neg\alpha_1, \ldots, \neg\alpha_n\} \models \gamma$$

(Sugg.: si utilizzi il teorema di compattezza)