COMPITO di LOGICA PER INFORMATICA (fila 1)
2 settembre 2005

Nome: Matricola:

Esercizio 1.1
Si dimostri che la seguente regola logica è valida, vale a dire, si dimostri che se la premessa è vera in ogni struttura allora anche la conclusione lo è:

$$\frac{(\forall x.A(x)) \to B}{\exists x.(A(x) \to B)}$$

dove la variabile x non appare libera in B (sugg.: si dimostri che se esiste una interpretazione che falsifica la conclusione allora esiste anche una interpretazione che falsifica la premessa).
Verificare poi se la seguente ne è una istanza corretta:

$$\frac{\to (\forall(Q))(P)}{\exists((z) \ \to (P(z))(Q))}$$

dove Q è una costante di arietà 0, z è una variabile di arietà 0 e P è una costante di arietà $0 \to 0$.

Soluzione. Verifichiamo che quella considerata è una regola valida. Seguendo il suggerimento, supponiamo che esista una struttura su un insieme U ed una interpretazione σ su tale struttura che falsifichi la conclusione della regola, cioè tale che

$$(\exists x.(A(x) \to B))^\sigma = \bot$$

ma questo accade se e solo se

$$\begin{array}{lll}
(\exists x.(A(x) \to B))^\sigma = \bot & \text{sse} & \text{per ogni } u \in U,\ (A(x) \to B)^{\sigma(x/u)} = \bot \\
 & \text{sse} & \text{per ogni } u \in U,\ (A(x))^{\sigma(x/u)} = \top \text{ e } (B)^{\sigma(x/u)} = \bot \\
x \notin \mathsf{VF}(B) & \text{sse} & \text{per ogni } u \in U,\ (A(x))^{\sigma(x/u)} = \top \text{ e } (B)^{\sigma} = \bot \\
 & \text{sse} & (\forall x.A(x))^\sigma = \top \text{ e } (B)^\sigma = \bot \\
 & \text{sse} & ((\forall x.A(x)) \to B)^\sigma = \bot
\end{array}$$

e quindi la stessa struttura falsificherebbe la premessa della regola utilizzando la stessa interpretazione σ.
È immediato ora accorgersi che quella proposta non è una istanza corretta della regola considerata visto che non si può applicare il quantificatore universale ad una espressione di arietà 0; l'errore consiste in uno scambio tra P e Q nella premessa della regola.

Esercizio 1.2
Dimostrare che l'insieme $\{A \to (B \to C)\}$ è non soddisfacibile se e solo se $A \to B$ è una formula valida e l'insieme $\{A \to C\}$ è non soddisfacibile.

Soluzione. Supponiamo che $\{A \to (B \to C)\}$ sia non soddisfacibile. Allora, per ogni valutazione σ, succede che $(A \to (B \to C))^\sigma = \bot$, e quindi $A^\sigma = \top$ e $(B \to C)^\sigma = \bot$ che porta a $B^\sigma = \top$ e $C^\sigma = \bot$. Ma allora, per ogni valutazione σ, abbiamo che $(A \to B)^\sigma = \top$ e $(A \to C)^\sigma = \bot$, cioè, $A \to B$ è una formula valida e l'insieme $\{A \to C\}$ è non soddisfacibile.
D'altra parte, se l'insieme $\{A \to C\}$ è non soddisfacibile allora, per ogni valutazione σ, succede che $(A \to C)^\sigma = \bot$, cioè $A^\sigma = \top$ e $C^\sigma = \bot$. Ma allora, se $A \to B$ è una formula valida deve succedere che $(A \to B)^\sigma = \top$ e quindi dal fatto che $A^\sigma = \top$ si deduce che $B^\sigma = \top$. Quindi, per ogni valutazione σ, $A^\sigma = \top$, $B^\sigma = \top$ e $C^\sigma = \bot$, vale a dire che $(A \to (B \to C))^\sigma = \bot$ e quindi $\{A \to (B \to C)\}$ non è soddisfacibile.

Esercizio 1.3
Si considerino le seguenti formule

1. $\forall x.\forall y.(R(x,y) \rightarrow \exists z.(R(z,x) \ \&\ \neg R(z,y)))$
2. $\forall x.\exists y.R(x,y)$
3. $\forall x.\forall y.\forall z.((R(x,y) \ \&\ R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$

Si dimostri dapprima semanticamente che l'insieme costituito da due qualunque di tali formule è soddisfacibile esibendone un modello e si dimostri poi sintatticamente che l'insieme costituito da tutte e tre le formule non è soddisfacibile utilzzando il metodo di risoluzione o gli alberi di confutazione.

Soluzione. Vediamo dapprima che l'insieme costituito dalle prime due formule è soddisfacibile. Per ottenere questo risultato basta considerare un insieme costituito da due elementi $U = \{0,1\}$ e una relazione binaria $\mathsf{R} = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}$ ed interpretare il segno predicativo binario R in tale ralazione. Infatti, con tale interpretazione è ovvio che per ogni elemento ne esiste un'altro che è in relazione con lui. Inoltre, per ogni coppia di elementi in U, o questi non sono in relazione, e quindi l'antecedente della prima formula viene interpretato in falso e l'intera implicazione diventa quindi vera, o, se sono in relazione, allora esiste un elemento che è in relazione con uno solo di essi.
Se consideriamo invece l'insieme costituito dalla seconda e la terza formula allora per trovare un modello basta considerare l'insieme dei numeri naturali e l'usuale relazione d'ordine tra numeri naturali che è transitiva e tale che ogni elemento ha un successivo.
Infine, un modello per l'insieme costituito dalla prima e dalla terza formula si ottiene considerando un qualsiasi insieme e la relazione vuota visto che in tal modo gli antecedenti delle implicazioni risultano falsi e quindi le implicazioni risulano vere.
Per quanto riguarda il secondo punto richiesto dall'esercizio, dopo l'opportuna trasformazione sintattica ci ritroviamo nella situazione di dover dimostrare che il seguente insieme di clausole è insoddisfacibile (secondo la nostra abitudine non abbiamo scritto i quantificatori universali nelle clausole risultanti):

$$\begin{array}{ll} (1) & \{\neg R(x,y) \vee R(g(x,y),x), \\ (2) & \neg R(x,y) \vee \neg R(g(x,y),y), \\ (3) & R(x,f(x)), \\ (4) & \neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z)\} \end{array}$$

Per produrre la clausola vuota possiamo ora procedere come segue

$\neg R(g(a,f(a)),a) \vee \neg R(a,f(a)) \vee R(g(a,f(a)),f(a))$	istanza della clausola 4 con $x := g(a,f(a)), y := a, z := f(a)$
$\neg R(a,f(a)) \vee R(g(a,f(a)),f(a))$	resolution con clausola 1 con $x := a, y := f(a)$
$\neg R(a,f(a))$	resolution con clausola 2 con $x := a, y := f(a)$
$\square$	resolution con clausola 3 con $x := a$

Esercizio 1.4
Trovare una funzione recursiva f che soddisfi le condizioni seguenti e determinarne il *nome*:

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f(1) & = & 1 \\ f(x+2) & = & f(x+1) + f(x) + \ldots + f(1) + f(0) \end{cases}$$

(Sugg.: si dimostri prima per induzione che la funzione $2^{x \div 1}$, dove con $\div$ indichiamo la differenza puntata, soddisfa le condizioni richieste e si risolva poi l'esercizio dando per scontato di saper dare un *nome* alle funzioni somma, prodotto e differenza puntata).

Soluzione. Prima di tutto osserviamo che la funzione che cerchiamo altro non è la funzione $2^{x \div 1}$, dove con $\div$ indichiamo la differenza puntata vale a dire la funzione tale che $x \div y \equiv x - y$ se $x \geq y$ e 0 altrimenti. Infatti $2^{0 \div 1} = 2^0 = 1$, $2^{1 \div 1} = 2^0 = 1$ e $2^{(x+2) \div 1} = 2^{x+1} = 2 \times 2^x = 2^x + 2^x = 2^{(x+1) \div 1} + 2^{(x+1) \div 1} = 2^{(x+1) \div 1} + 2^{x \div 1} + 2^{x \div 1} = \ldots = 2^{(x+1) \div 1} + 2^{x \div 1} + \ldots + 2^{1 \div 1} + 2^{0 \div 1}$.
Quindi per risolvere il nostro esercizio basta comporre la funzione esponenziale $\mathsf{exp2}$, che eleva 2 all'argomento considerato, con la differenza puntata che toglie 1 all'argomento. Per quanto riguarda la funzione $\mathsf{exp2}$ possiamo definirla nel modo che segue

$$\begin{cases} \mathsf{exp2}(0) & = & 1 & \equiv & \mathsf{C}^0[\mathsf{S}^1, \mathsf{M}^0[\mathsf{Z}^1]] \\ \mathsf{exp2}(x+1) & = & 2 \times \mathsf{exp2}(x) & \equiv & \mathsf{C}^2[\times, \mathsf{C}^2[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^2[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^2[\mathsf{Z}^1, \mathsf{P}^2_1]]], \mathsf{P}^2_2](x, \mathsf{exp2}(x)) \end{cases}$$

arrivando quindi a

$$\mathsf{exp2} \equiv R^1[\mathsf{C}^0[\mathsf{S}^1, \mathsf{M}^0[\mathsf{Z}^1]], \mathsf{C}^2[\times, \mathsf{C}^2[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^2[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^2[\mathsf{Z}^1, \mathsf{P}^2_1]]], \mathsf{P}^2_2]$$

dove $+ \equiv \mathsf{R}^2[\mathsf{P}^1_1, \mathsf{C}^3[\mathsf{S}^1, \mathsf{P}^3_3]]$ e $\times \equiv \mathsf{R}^2[\mathsf{Z}^1, \mathsf{C}^3[+, \mathsf{P}^3_2, \mathsf{P}^3_3]]$.
Quindi la soluzione dell'esercizio è

$$f(x) = \mathsf{exp2}(\div(x,1)) \equiv \mathsf{C}^1[\mathsf{exp2}, \mathsf{C}^1[\div, \mathsf{P}^1_1, \mathsf{C}^1[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^1[\mathsf{Z}, \mathsf{P}^1_1]]]](x)$$

vale a dire che

$$f \equiv \mathsf{C}^1[\mathsf{exp2}, \mathsf{C}^1[\div, \mathsf{P}^1_1, \mathsf{C}^1[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^1[\mathsf{Z}, \mathsf{P}^1_1]]]]$$

COMPITO di LOGICA PER INFORMATICA (fila 2)
2 settembre 2005

Nome: Matricola:

Esercizio 2.1
Si dimostri che la seguente regola logica è valida, vale a dire, si dimostri che se la premessa è vera in ogni struttura allora anche la conclusione lo è:

$$\frac{(\exists x.A(x)) \to B}{\forall x.(A(x) \to B)}$$

dove la variabile x non appare libera in B (sugg.: si dimostri che se esiste una interpretazione che falsifica la conclusione allora esiste anche una interpretazione che falsifica la premessa).
Verificare poi se la seguente ne è una istanza corretta:

$$\frac{\to (\exists(Q))(P)}{\forall((z)\ \to (P(z))(Q))}$$

dove Q è una costante di arietà 0, z è una variabile di arietà 0 e P è una costante di arietà $0 \to 0$.

Soluzione. Verifichiamo che quella considerata è una regola valida. Seguendo il suggerimento, supponiamo che esista una struttura su un insieme U ed una interpretazione σ su tale struttura che falsifichi la conclusione della regola, cioè tale che

$$(\forall x.(A(x) \to B))^\sigma = \bot$$

ma questo accade se e solo se

$$\begin{array}{lll}
(\forall x.(A(x) \to B))^\sigma = \bot & \text{sse} & \text{esiste } u \in U,\ (A(x) \to B)^{\sigma(x/u)} = \bot \\
 & \text{sse} & \text{esiste } u \in U,\ (A(x))^{\sigma(x/u)} = \top \text{ e } (B)^{\sigma(x/u)} = \bot \\
x \notin \mathsf{VF}(B) & \text{sse} & \text{esiste } u \in U,\ (A(x))^{\sigma(x/u)} = \top \text{ e } (B)^{\sigma} = \bot \\
 & \text{sse} & (\exists x.A(x))^\sigma = \top \text{ e } (B)^\sigma = \bot \\
 & \text{sse} & ((\exists x.A(x)) \to B)^\sigma = \bot
\end{array}$$

e quindi la stessa struttura falsificherebbe la premessa della regola utilizzando la stessa interpretazione σ.
È immediato ora accorgersi che quella proposta non è una istanza corretta della regola considerata visto che non si può applicare il quantificatore esistenziale ad una espressione di arietà 0; l'errore consiste in uno scambio tra P e Q nella premessa della regola.

Esercizio 2.2
Dimostrare che l'insieme $\{C \to (A \vee B)\}$ è non soddisfacibile se e solo se gli insiemi $\{\neg A, B\}$ e $\{C \to A\}$ sono non soddisfacibili.

Soluzione. Supponiamo che $\{\{C \to (A \vee B)\}\}$ sia non soddisfacibile. Allora, per ogni valutazione σ, succede che $(C \to (A \vee B))^\sigma = \bot$, e quindi $C^\sigma = \top$ e $(A \vee B)^\sigma = \bot$ che porta a $A^\sigma = \bot$ e $B^\sigma = \bot$. Ma allora, per ogni valutazione σ, abbiamo che $\{\neg A, B\}$ è non soddisfacibile, visto che comunque abbiamo che $B^\sigma = \bot$, e $(C \to A)^\sigma = \bot$, cioè, l'insieme $\{C \to A\}$ è non soddisfacibile.
D'altra parte, se l'insieme $\{C \to A\}$ è non soddisfacibile allora, per ogni valutazione σ, succede che $(C \to A)^\sigma = \bot$, cioè $C^\sigma = \top$ e $A^\sigma = \bot$. Ma allora, se $\{\neg A, B\}$ è non soddisfacibile deve succedere che $B^\sigma = \bot$ visto che $(\neg A)^\sigma = \top$ segue da $A^\sigma = \bot$. Quindi, per ogni valutazione σ, $A^\sigma = \bot$, $B^\sigma = \bot$ e $C^\sigma = \top$, vale a dire che $(C \to (A \vee B))^\sigma = \bot$ e quindi $\{C \to (A \vee B\}$ non è soddisfacibile.

Esercizio 2.3
Si considerino le seguenti formule

1. $\forall x.\forall y.(R(x,y) \to \exists z.(R(z,x)\ \&\ \neg R(z,y)))$
2. $\exists x.\exists y.R(x,y)$
3. $\forall x.\forall y.(R(x,y) \to (\exists z.R(z,z)))$

Si dimostri dapprima semanticamente che l'insieme costituito da due qualunque di tali formule è soddisfacibile esibendone un modello e si dimostri poi sintatticamente che l'insieme costituito da tutte e tre le formule non è soddisfacibile utilzzando il metodo di risoluzione o gli alberi di confutazione.

Soluzione. Vediamo dapprima che l'insieme costituito dalle prime due formule è soddisfacibile. Per ottenere questo risultato basta considerare un insieme costituito da due elementi $U = \{0,1\}$ e una relazione binaria $\mathsf{R} = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}$ ed interpretare il segno predicativo binario R in tale ralazione. Infatti, con tale interpretazione è ovvio che esistono due elementi che sono in relazione. Inoltre, per ogni coppia di elementi in U, o questi non sono in relazione, e quindi l'antecedente della prima formula viene interpretato in falso e l'intera implicazione diventa quindi vera, o, se sono in relazione, allora esiste un elemento che è in relazione con uno solo di essi.
Se consideriamo invece l'insieme costituito dalla seconda e la terza formula allora per trovare un modello basta considerare l'insieme dei numeri naturali e l'usuale relazione d'ordine tra numeri naturali che è riflessiva, per cui la conseguenza della terza formula è comunque vera, e tale che esistono due elementi uno minore di un altro.
Infine, un modello per l'insieme costituito dalla prima e dalla terza formula si ottiene considerando un qualsiasi insieme non vuoto e la relazione vuota visto che in tal modo gli antecedenti delle implicazioni risultano falsi e quindi le implicazioni risulano vere.
Per quanto riguarda il secondo punto richiesto dall'esercizio, dopo l'opportuna trasformazione sintattica ci ritroviamo nella situazione di dover dimostrare che il seguente insieme di clausole è insoddisfacibile (secondo la nostra abitudine non abbiamo scritto i quantificatori universali nelle clausole risultanti):

$$\begin{array}{ll}
(1) & \{\neg R(x,y) \vee R(g(x,y),x), \\
(2) & \neg R(x,y) \vee \neg R(g(x,y),y), \\
(3) & R(a,b), \\
(4) & \neg R(x,y) \vee R(h(x,y),h(x,y))\}
\end{array}$$

Per produrre la clausola vuota possiamo ora procedere come segue

$\neg R(h(a,b),h(a,b)) \vee R(g(h(a,b),h(a,b)),h(a,b))$	istanza della clausola 1 con $x := h(a,b), y := h(a,b)$
$\neg R(h(a,b),h(a,b))$	resolution con clausola 2 con $x := h(a,b), y := h(a,b)$
$\neg R(a,b)$	resolution con clausola 4 con $x := a, y := b$
$\square$	resolution con clausola 3

Esercizio 2.4

Trovare una funzione recursiva f che soddisfi le condizioni seguenti e determinarne il *nome*:

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f(1) & = & 1 \\ f(2) & = & 1 \\ f(x+3) & = & f(x+2)+f(x+1)+\ldots+f(1) \end{cases}$$

(Sugg.: si dimostri prima per induzione che la funzione $2^{x \div 2}$, dove con $\div$ indichiamo la differenza puntata, soddisfa le condizioni richieste e si risolva poi l'esercizio dando per scontato di saper dare un *nome* alle funzioni somma, prodotto e differenza puntata).

Soluzione. Prima di tutto osserviamo che la funzione che cerchiamo altro non è la funzione $2^{x \div 2}$, dove con $\div$ indichiamo la differenza puntata vale a dire la funzione tale che $x \div y \equiv x - y$ se $x \geq y$ e 0 altrimenti. Infatti $2^{0 \div 2} = 2^0 = 1$, $2^{1 \div 2} = 2^0 = 1$, $2^{2 \div 2} = 2^0 = 1$ e $2^{(x+3) \div 2} = 2^{x+1} = 2 \times 2^x = 2^x + 2^x = 2^{(x+2) \div 2} + 2^{(x+2) \div 2} = 2^{(x+2) \div 2} + 2^{(x+1) \div 2} + 2^{(x+1) \div 2} = \ldots = 2^{(x+2) \div 2} + 2^{(x+1) \div 2} + \ldots + 2^{1 \div 2}$.

Quindi per risolvere il nostro esercizio basta comporre la funzione esponenziale $\mathsf{exp2}$, che eleva 2 all'argomento considerato, con la differenza puntata che toglie 2 all'argomento. Per quanto riguarda la funzione $\mathsf{exp2}$ possiamo definirla nel modo che segue

$$\begin{cases} \mathsf{exp2}(0) & = & 1 & \equiv & \mathsf{C}^0[\mathsf{S}^1, \mathsf{M}^0[\mathsf{Z}^1]] \\ \mathsf{exp2}(x+1) & = & 2 \times \mathsf{exp2}(x) & \equiv & \mathsf{C}^2[\times, \mathsf{C}^2[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^2[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^2[\mathsf{Z}^1, \mathsf{P}^2_1]]], \mathsf{P}^2_2](x, \mathsf{exp2}(x)) \end{cases}$$

arrivando quindi a

$$\mathsf{exp2} \equiv R^1[\mathsf{C}^0[\mathsf{S}^1, \mathsf{M}^0[\mathsf{Z}^1]], \mathsf{C}^2[\times, \mathsf{C}^2[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^2[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^2[\mathsf{Z}^1, \mathsf{P}^2_1]]], \mathsf{P}^2_2]$$

dove $+ \equiv \mathsf{R}^2[\mathsf{P}^1_1, \mathsf{C}^3[\mathsf{S}^1, \mathsf{P}^3_3]]$ e $\times \equiv \mathsf{R}^2[\mathsf{Z}^1, \mathsf{C}^3[+, \mathsf{P}^3_2, \mathsf{P}^3_3]]$.

Quindi la soluzione dell'esercizio è

$$f(x) = \mathsf{exp2}(\div(x,2)) \equiv \mathsf{C}^1[\mathsf{exp2}, \mathsf{C}^1[\div, \mathsf{P}^1_1, \mathsf{C}^1[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^1[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^1[\mathsf{Z}, \mathsf{P}^1_1]]]]](x)$$

vale a dire che

$$f \equiv \mathsf{C}^1[\mathsf{exp2}, \mathsf{C}^1[\div, \mathsf{P}^1_1, \mathsf{C}^1[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^1[\mathsf{S}^1, \mathsf{C}^1[\mathsf{Z}, \mathsf{P}^1_1]]]]]$$