COMPITO di LOGICA MATEMATICA (fila 1)
14 dicembre 2005

Nome: Matricola:

Esercizio 1.1
Dimostrare in deduzione naturale che

$$A \to (\neg A \to B)$$

é una formula intuizionisticamente valida e esibirne un “ticket” (sugg.: si ricordi che un ticket per $\bot$ si può trasformare in un ticket per una formula qualsiasi)

Soluzione. Una possibile prova in deduzione naturale è la seguente

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_2 \quad [\neg A]_1}{\bot}}{B}}{\neg A \to B}\ 1}{A \to (\neg A \to B)}\ 2$$

Il ticket che cerchiamo è una funzione che preso un ticket a per A fornisce una funzione che preso un ticket b per $\neg A$ fornisce un ticket per B. Ora la prova in deduzione naturale suggerisce cosa fare. Infatti il ticket b per $\neg A$ deve essere una funzione che fornisce un ticket per $\bot$ quando gli forniamo un ticket per A (si ricordi che $\neg A \equiv A \to \bot$). Quindi applicando tale funzione b al ticket a otteniamo un ticket $b(a)$ per $\bot$ che possiamo trasformare, seguendo il suggerimento, nel desiderato ticket per B.

Esercizio 1.2
Dimostare che la seguente uguaglianza vale in ogni algebra di Boole mentre esiste una algebra di Heyting che non la soddisfa

$$\nu(x \wedge \nu y) = x \to y$$

Soluzione. Per ottenere la soluzione della prima parte dell'esercizio possiamo fare uso del teorema di validità che ci assicura che se riusciamo a dimostrare classicamente che $A \vdash B$ allora per ogni interpretazione V in una algebra di Boole si avrà che $V(A) \leq V(B)$. Nel nostro caso abbiamo quindi bisogno di due derivazioni (notare che la seconda è classica) visto che dobbiamo dimostrare una uguaglianza:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to B \qquad \dfrac{[A \wedge \neg B]_1}{A}}{B} \qquad \dfrac{[A \wedge \neg B]_1}{\neg B}}{\bot}}{\neg(A \wedge \neg B)}\,1 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_2 \quad [\neg B]_1}{A \wedge \neg B} \qquad \neg(A \wedge \neg B)}{\bot}}{B}\,1}{A \to B}\,2$$

La prima deduzione è intuizionista e quindi, sempre per il teorema di validità, $x \to y \leq \nu(x \wedge \nu y)$ vale in ogni algebra di Heyting; se vogliamo quindi falsificare l'uguaglianza dobbiamo riuscire a trovare un'algebra di Heyting che falsifica la seconda diseguaglianza. Una che fa al caso nostro è la seguente

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] 1 \arrow[d] \\ a \arrow[d] \\ b \arrow[d] \\ 0 \end{tikzcd}$$

Infatti, $\nu(a \wedge \nu b) = \nu(a \wedge 0) = \nu 0 = 1$ mentre $a \to b = b$.

Esercizio 1.3
Determinare quali tra le seguenti formule sono valide intuizionisticamente, valide solo classicamente o non valide fornendone una dimostrazione o/e esibendone un contromodello.

1. $(\forall x.(A(x) \vee B(x))) \to ((\forall x.A(x)) \vee (\forall x.B(x)))$
2. $(\forall x.(A(x) \to B(x))) \to (\exists x.(A(x) \to \forall x.B(x)))$
3. $(\exists x.(A(x) \to \neg A(x))) \to ((\forall x.A(x)) \to (\forall x.\neg A(x)))$

Soluzione. La prima formula non vale ne intuizionisticamente ne classicamente; per convincersene basta considerare un universo con due elementi tali che sul primo vale (l'interpretazione di) A e non vale (l'interpretazione di) B mentre sul secondo vale (l'interpretazione di) B e non vale (l'interpretazione di) A. Allora è vero che per ogni elemento del dominio o vale A o vale B mentre ne A ne B valgono per tutti gli elementi del dominio. Una prova classica della seconda formula è la seguente:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x.(A(x) \to B(x))]_1}{A(x) \to B(x)} \qquad \begin{matrix}[\neg(\exists x.(A(x) \to \forall x.B(x)))]_c \\ \vdots \\ \dfrac{\forall x.\neg(A(x) \to \forall x.B(x))}{\neg(A(x) \to \forall x.B(x))} \\ \vdots \\ A(x)\end{matrix}}{B(x)}}{\forall x.B(x)} \qquad \begin{matrix}[\neg(\exists x.(A(x) \to \forall x.B(x)))]_c \\ \vdots \\ \dfrac{\forall x.\neg(A(x) \to \forall x.B(x))}{\neg(A(x) \to \forall x.B(x))} \\ \vdots \\ \neg\forall x.B(x)\end{matrix}}{\bot}}{(\exists x.(A(x) \to \forall x.B(x)))}\, c}{(\forall x.(A(x) \to B(x))) \to (\exists x.(A(x) \to \forall x.B(x)))}\, 1
$$

dove una prova che da $\neg(\exists x.(A(x) \to \forall x.B(x)))$ si può dedurre $\forall x.\neg(A(x) \to \forall x.B(x))$ è la seguente

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\exists x.(A(x) \to \forall x.B(x))) \qquad \dfrac{[A(x) \to \forall x.B(x)]_1}{\exists x.(A(x) \to \forall x.B(x))}}{\bot}}{\neg(A(x) \to \forall x.B(x))}\, 1}{\forall x.\neg(A(x) \to \forall x.B(x))}
$$

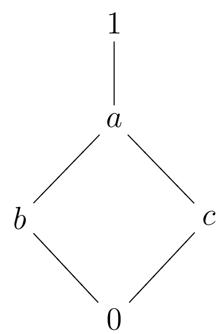
una prova che da $\neg(A(x) \to \forall x.B(x))$ si può dedurre classicamente $A(x)$ è la seguente

$$
\dfrac{\dfrac{\neg(A(x) \to \forall x.B(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]_1 \quad [\neg A(x)]_c}{\bot}}{\forall x.B(x)}}{A(x) \to \forall x.B(x)}\, 1}{\bot}}{A(x)}\, c
$$

e infine una deduzione da $\neg(A(x) \to \forall x.B(x))$ di $\neg\forall x.B(x)$ è la seguente

$$\dfrac{\dfrac{\neg(A(x) \to \forall x.B(x)) \qquad \dfrac{[\forall x.B(x)]_1}{A(x) \to \forall x.B(x)}}{\bot}}{\neg\forall x.B(x)}\ 1$$

Tuttavia essa non vale intuizionisticamente visto che possiamo falsificarla in una struttura con due elementi $\{0, 1\}$ basata sulla seguente algebra di Heyting



interpretando A nella funzione tale che $V(A)(0) = b$, $V(A)(1) = c$, $V(B)(0) = b$ e $V(B)(1) = c$. Infatti in questo caso otteniamo che

$$\begin{array}{rcl} V(\forall x.(A(x) \to B(x))) & = & (V(A)(0) \to V(B)(0)) \wedge (V(A)(1) \to V(B)(1)) \\ & = & (b \to b) \wedge (c \to c) \\ & = & 1 \wedge 1 \\ & = & 1 \end{array}$$

mentre

$$\begin{array}{rcl} V(\exists x.(A(x) \to \forall x.B(x)) & = & (V(A)(0) \to V(\forall x.B(x))) \vee (V(A)(1) \to V(\forall x.B(x))) \\ & = & (b \to 0) \vee (c \to 0) \\ & = & c \vee b \\ & = & a \end{array}$$

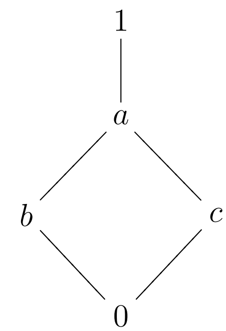
e $1 \to a = a \neq 1$.
Infine, la terza formula è valida intuizionisticamente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x.A(x)]_3 \qquad \begin{array}{c} \dfrac{[\exists x.(A(x) \to \neg A(x))]_4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]_1 \qquad \dfrac{[A(x)]_1 \quad [A(x) \to \neg A(x)]_2}{\neg A(x)}}{\bot}}{\neg A(x)}\ 1}{\exists x.\neg A(x)}}{\exists x.\neg A(x)}\ 2 \\ \vdots \\ \neg\forall x.A(x) \end{array}}{\dfrac{\bot}{\forall x.\neg A(x)}}}{(\forall x.A(x)) \to (\forall x.\neg A(x))}\ 3}{(\exists x.(A(x) \to \neg A(x))) \to ((\forall x.A(x)) \to (\forall x.\neg A(x)))}\ 4$$

dove una prova che da $\exists x.\neg A(x)$ si può dedurre $\neg\forall x.A(x)$ è la seguente

$$\dfrac{\exists x.\neg A(x) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A(x)]_2 \quad \dfrac{[\forall x.A(x)]_1}{A(x)}}{\bot}}{\neg\forall x.A(x)}\;1}{\neg\forall x.A(x)}\;2$$

Esercizio 1.4
Si costruisca la rappresentazione topologica della seguente algebra di Heyting



Quanti punti sono necessari per costruire lo spazio topologico? Quanti sono gli aperti?

Soluzione. I punti necessari per la costruzione della topologia desiderata sono i filtri primi dell'algebra di Heyting, vale a dire

$$\begin{aligned} f_1 &= \{1\} \\ f_b &= \{b, a, 1\} \\ f_c &= \{c, a, 1\} \end{aligned}$$

Allora gli aperti della base della topologia sono quelli che si ottengono utilizzando la mappa ext, vale a dire

$$\begin{aligned} \mathsf{ext}(1) &= \{f_1, f_b, f_c\} \\ \mathsf{ext}(a) &= \{f_b, f_c\} \\ \mathsf{ext}(b) &= \{f_b\} \\ \mathsf{ext}(c) &= \{f_c\} \\ \mathsf{ext}(0) &= \emptyset \end{aligned}$$

ed essi esauriscono gli aperti della topologia visto che si tratta di una famiglia già chiusa per unioni arbitrarie ed intersezioni finite.