MATEMATICA DI BASE

ALGEBRA

20 luglio 2005

NOME e COGNOME in stampatello:

Esercizio 4

Si determini se la seguente congruenza

$$10x \equiv 2 \text{ mod } 14$$

ammette soluzioni e, nel caso positivo, le si calcoli.

Soluzione. Visto che il massimo comun divisore tra 10 e 14 è 2 e che divide quindi 2, vale a dire il termine noto della congruenza, per un teorema nelle dispense sappiamo che la congruenza ammette esattamente due soluzioni individuate da due numeri interi e costituite da tutti i numeri interi ad essi congrui modulo 14. Tali soluzioni saranno individuate da una coppia di numeri interi x, non congrui tra loro modulo 14, e tali che $10x$ diviso per 14 abbia resto 2, vale a dire che $10x-2$ si deve dividere per 14, vale a dire che $5x-1$ si deve dividere per 7. I possibili valori sono quindi $x = 3$ e $x = 10$. Ne segue che l'insieme delle soluzioni è $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3 + 14k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 10 + 14k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 5

Sia $z_1 \equiv 3 + 4i$. Si risolvano le seguenti equazioni a coefficienti complessi e indeterminata z

1.
$$z_1 \times z = \overline{z_1}$$
dove $\overline{z_1}$ indica il complesso comiugato di z_1.

2.
$$z^2 = z_1$$
dove $z^2 = z \times z$.

Soluzione. La soluzione della prima equazione è semplicemente il risultato della moltiplicazione del coniugato di z_1 con l'inverso di z_1. Ora abbiamo che $\overline{z_1} \equiv 3 - 4i$, mentre l'inverso è $z_1^{-1} \equiv \frac{3}{3^2+4^2} - \frac{4}{3^2+4^2}i = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$ (si vedano le dispense). La soluzione è quindi $z \equiv (3 - 4i) \times (\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i) = -\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i$.

Per risolvere la seconda equazione bisogna trovare un numero complesso $z \equiv x + yi$ tale che $z^2 = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) - 2xyi = 3 + 4i$. Si deve quindi risolvere un sistema di due equazioni in due incognite, vale a dire

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 3 \\ 2xy & = & 4 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $x' = 2$ e $y' = 1$ e $x'' = -2$ e $y'' = -1$. Quindi la nostra equazione ammette due soluzioni, vale a dire $z' = 2 + i$ e $z'' = -2 - i$.

Esercizio 6

Sia $f : A \to B$ una funzione dall'insieme A all'insieme B e R sia una relazione di equivalenza tra gli elementi dell'insieme B.

- Si definisca una relazione T sull'insieme A ponendo

  $$a\ T\ c \equiv f(a)\ R\ f(c)$$

  Dimostrare che T è una relazione di equivalenza.

  Soluzione. Basta verificare che T sia riflessiva, simmetrica e transitiva. Ora T è riflessiva visto che, per ogni $a \in A$, $a\ T\ a$ vale visto che $f(a)\ R\ f(a)$ vale per la riflessività di R. Similmente si dimostra la validità della simmetria visto che $a\ T\ c$ se e solo se $f(a)\ R\ f(c)$ se e solo se $f(c)\ R\ f(a)$ se e solo se $c\ T\ a$. Infine la transitività si ottiene come segue: $a\ T\ b$ e $b\ T\ c$ implicano $f(a)\ R\ f(b)$ e $f(b)\ R\ f(c)$ da cui si ottiene $f(a)\ R\ f(c)$ per la transitività di R e quindi $a\ T\ c$.

- Si considerino gli insiemi $A/T \equiv \{[a]_T \mid a \in A\}$ delle classi di equivalenza su A determinate da T e $B/R \equiv \{[b]_R \mid b \in B\}$ delle classi di equivalenza su B determinate da R e si definisca la mappa g ponendo

  $$g([a]_T) = [f(a)]_R$$

  Si dimostri che g è ben definita, vale a dire, che se $[a]_T = [c]_T$ allora $g([a]_T) = g([c]_T)$.

  Soluzione. Se $[a]_T = [c]_T$ allora $a\ T\ c$, ma questo accade se e solo se $f(a)\ R\ f(c)$ e quindi $[f(a)]_R = [f(c)]_R$ che fornisce $g([a]_T) = g([c]_T)$ per come è definita la mappa g.

- Con la stessa notazione introdotta nel punto precedente, si dimostri che la funzione g è iniettiva.

  Soluzione. Bisogna dimostrare che se $g([a]_T) = g([c]_T)$ allora $[a]_T = [c]_T$. Ora, se $g([a]_T) = g([c]_T)$ allora $[f(a)]_R = [f(c)]_R$, vale a dire, $f(a)\ R\ f(c)$ e quindi ne segue $a\ T\ c$ per definizione di T, vale a dire $[a]_T = [c]_T$.