

## MATEMATICA DI BASE

### ALGEBRA

8 settembre 2005

NOME e COGNOME in stampatello:

#### Esercizio 4

- Si dimostri per induzione che, per ogni numero naturale  $n$ ,

$$5^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$$

**Soluzione.** Nel caso base, per  $n = 0$  abbiamo  $5^{2 \times 0} = 5^0 = 1 \equiv 1 \pmod{3}$  mentre, per quel che riguarda il passo induttivo, abbiamo  $5^{2(n+1)} = 5^{2n+2} = 5^{2n} \times 5^2 \equiv 1 \times 1 = 1 \pmod{3}$  dove  $5^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$  vale per ipotesi induttiva e  $5^2 = 25 = (3 \times 8) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ .

- Si dimostri che, per ogni numero naturale  $n$ ,

$$k^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$$

vale per ogni numero naturale  $k$  che non sia un multiplo di 3 (sugg.: si dimostri che se  $k$  non è un multiplo di 3 allora  $k^2 \equiv 1 \pmod{3}$ ).

**Soluzione.** Vediamo dapprima che se  $k$  non è un multiplo di 3 allora  $k^2 \equiv 1 \pmod{3}$ . Infatti se  $k$  non è un multiplo di 3 allora sono possibili due casi: o  $k = 3n + 1$ , e quindi  $k^2 = (3n + 1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ , oppure  $k = 3n + 2$ , e quindi  $k^2 = (3n + 2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 \equiv 1 \pmod{3}$ .

Possiamo quindi riprendere la dimostrazione del caso precedente generalizzandola al caso  $k$  invece che al numero 5. Nel caso base, per  $n = 0$  abbiamo  $k^{2 \times 0} = k^0 = 1 \equiv 1 \pmod{3}$  mentre, per quel che riguarda il passo induttivo, abbiamo  $k^{2(n+1)} = k^{2n+2} = k^{2n} \times k^2 \equiv 1 \times 1 = 1 \pmod{3}$  dove  $k^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$  vale per ipotesi induttiva e  $k^2 \equiv 1 \pmod{3}$  per quanto abbiamo appena visto.

### Esercizio 5

- Si calcolino i seguenti numeri complessi:  $\sqrt{i}$ ,  $(1+i)^{12}$

**Soluzione.** Per calcolare  $\sqrt{i}$  dobbiamo trovare due numeri reali  $a$  e  $b$  tali che  $(a+ib)^2 = i$ , vale a dire  $a^2 - b^2 = 0$  e  $2ab = 1$ . Quindi otteniamo che  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$  oppure  $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Il modo più veloce per calcolare  $(1+i)^{12}$  è il seguente:

$$(1+i)^{12} = ((1+i)^2)^6 = (2i)^6 = 2^6 i^6 = -64$$

- Si risolva le seguente equazione nell'indeterminata complessa  $z$

$$z^2 + z\bar{z} = 2 + i$$

dove  $z^2 = z \times z$  e  $\bar{z}$  indica il complesso coniugato di  $z$ .

**Soluzione.** Dobbiamo trovare due numeri reali  $a$  e  $b$  tali che

$$(a+ib)^2 + (a+ib)(a-ib) = 2 + i$$

vale a dire

$$a^2 - b^2 + 2abi + a^2 + b^2 = 2 + i$$

Si tratta quindi di risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} 2a^2 &= 2 \\ 2ab &= 1 \end{cases}$$

che ha due soluzioni:  $a_1 = 1, b_1 = \frac{1}{2}$  e  $a_2 = -1, b_2 = -\frac{1}{2}$ .

### Esercizio 6

Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione dall'insieme  $X$  all'insieme  $Y$  e definiamo la funzione  $f^\rightarrow : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  ponendo

$$f^\rightarrow(U) = \{f(x) \in Y \mid x \in U\}$$

Dimostrare che  $f$  è iniettiva se e solo se  $f^\rightarrow$  è iniettiva.

**Soluzione.** Si tratta di dimostrare due implicazioni. Vediamo prima che se  $f^\rightarrow$  è iniettiva allora  $f$  è iniettiva. Supponiamo quindi che  $f(x) = f(y)$ , allora  $\{f(x)\} = \{f(y)\}$ . Notiamo ora che, per ogni  $z \in X$ ,  $f^\rightarrow(\{z\}) = \{f(z)\}$  e quindi  $\{f(x)\} = \{f(y)\}$  implica che  $f^\rightarrow(\{x\}) = f^\rightarrow(\{y\})$  che per la nostra ipotesi sulla iniettività di  $f^\rightarrow$  porta a  $\{x\} = \{y\}$  che implica che  $x = y$ .

D'altra parte se  $f^\rightarrow(U) = f^\rightarrow(V)$ , vale a dire  $\{f(u) \in Y \mid u \in U\} = \{f(v) \in Y \mid v \in V\}$ , allora per ogni  $u \in U$  c'è un  $v \in V$  tale che  $f(u) = f(v)$  e per ogni  $v \in V$  c'è un  $u \in U$  tale che  $f(v) = f(u)$ . Quindi per la iniettività di  $f$  otteniamo che per ogni  $u \in U$  c'è un  $v \in V$  tale che  $u = v$  e per ogni  $v \in V$  c'è un  $u \in U$  tale che  $v = u$ , vale a dire che  $U = V$ .