COMPITO di LOGICA MATEMATICA (fila 1)
12 gennaio 2006

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Si consideri la seguente formula predicativa

$$(\forall x.(A(x) \to \exists y.\neg A(y))) \to (\forall y.(\neg A(y) \to \exists x.A(x)))$$

Determinare una struttura e una interpretazione che la soddisfino e una struttura e una interpretazione che la falsifichino.

Soluzione.
Una struttura che verifica la formula considerata si può ottenere considerando l'insieme $D = \{0\}$, l'algebra di Boole $\{0, 1\}$ e la valutazione $V(A)(0) = 1$. Infatti in questo caso abbiamo $V(\exists x.A(x)) = 1$ e quindi $V(\forall y.(\neg A(y) \to \exists x.A(x))) = 1$ che ci permette di concludere subito $V((\forall x.(A(x) \to \exists y.\neg A(y))) \to (\forall y.(\neg A(y) \to \exists x.A(x)))) = 1$.
In modo simile una struttura che falsifica la formula considerata si può ottenere sullo stesso insieme e la stessa algebra di Boole valutando $V(A)(0) = 0$. Infatti in questo caso otteniamo $V(\exists y.\neg A(y)) = 1$, e quindi $V(\forall x.(A(x) \to \exists y.\neg A(y))) = 1$, e $V(\exists x.A(x)) = 0$ che porta a $V^{\sigma(y/0)}(\neg A(y) \to \exists x.A(x)) = 0$ e quindi $V(\forall y.(\neg A(y) \to \exists x.A(x))) = 0$ e questo significa che $V((\forall x.(A(x) \to \exists y.\neg A(y))) \to (\forall y.(\neg A(y) \to \exists x.A(x)))) = 0$.

Esercizio 2

Dimostrare, utilizzando la deduzione naturale, che la seguente formula proposizionale è una verità classica mentre non è una verità intuizionista (si esibisca un controesempio intuizionista)

$$(A \to (B_1 \lor B_2)) \to ((A \to B_1) \lor (A \to B_2))$$

Soluzione. La seguente è una prova in deduzione naturale classica del fatto che se $A \to (B_1 \lor B_2)$ allora $(A \to B_1) \lor (A \to B_2)$

$$\dfrac{\dfrac{A \to (B_1 \lor B_2) \qquad \begin{array}{c}[\neg((A \to B_1) \lor (A \to B_2))]_c \\ \vdots \\ \neg(A \to B_1) \\ \vdots \\ A\end{array}}{B_1 \lor B_2} \qquad \dfrac{[B_1]_1 \qquad \begin{array}{c}[\neg((A \to B_1) \lor (A \to B_2))]_c \\ \vdots \\ \neg(A \to B_1) \\ \vdots \\ \neg B_1\end{array}}{\bot} \qquad \dfrac{[B_2]_1 \qquad \begin{array}{c}[\neg((A \to B_1) \lor (A \to B_2))]_c \\ \vdots \\ \neg(A \to B_2) \\ \vdots \\ \neg B_2\end{array}}{\bot}}{\dfrac{\bot}{(A \to B_1) \lor (A \to B_2)}\ c}\ 1$$

dove una deduzione di $\neg(A \to B_1)$ da $\neg((A \to B_1) \lor (A \to B_2))$ si ottiene come segue

$$\dfrac{\dfrac{\neg((A \to B_1) \lor (A \to B_2)) \qquad \dfrac{[A \to B_1]_1}{(A \to B_1) \lor (A \to B_2)}}{\bot}}{\neg(A \to B_1)}\ 1$$

una deduzione di $\neg(A \to B_2)$ da $\neg((A \to B_1) \lor (A \to B_2))$ è completamente simile, una deduzione classica di A da $\neg(A \to B_1)$ si ottiene come segue

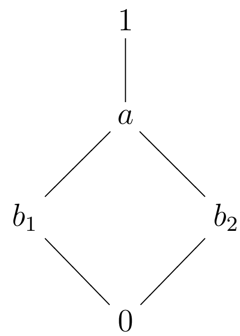
$$\dfrac{\dfrac{\neg(A \to B_1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]_c \quad [A]_1}{\bot}}{B_1}}{A \to B_1}\ 1}{\bot}}{A}\ c$$

una deduzione di $\neg B_1$ da $\neg(A \to B_1)$ si ottiene come segue

$$\dfrac{\dfrac{\neg(A \to B_1) \qquad \dfrac{[B_1]_1}{A \to B_1}}{\bot}}{\neg B_1}\ 1$$

e una deduzione di $\neg B_2$ da $\neg(A \to B_2)$ è completamente simile.

Possiamo ora ottenere un controesempio alla validità intuizionista della formula considerando la seguente algebra di Heyting



e l'interpretazione $V(A) = a$, $V(B_1) = b_1$ e $V(B_2) = b_2$. Infatti, $V(A \to (B_1 \vee B_2)) = a \to (b_1 \vee b_2) = a \to a = 1$ mentre $V(A \to B_1) = a \to b_1 = b_1$ e $V(A \to B_2) = a \to b_2 = b_2$ e quindi $V((A \to B_1) \vee (A \to B_2)) = b_1 \vee b_2 = a \neq 1$.

Esercizio 3
Determinare, utilizzando la deduzione naturale, quali tra le seguenti formule sono valide intuizionisticamente e quali sono valide solo classicamente (si fornisca in questo secondo caso un controesempio intuizionista).

1. $(\forall x.(A(x) \land B(x))) \to ((\forall x.A(x)) \land (\forall x.B(x)))$
2. $(\forall x.(A(x) \to \exists y.\neg A(y))) \to (\exists y.\neg A(y))$
3. $((\exists x.A(x)) \to (\forall x.(A(x) \to B(x)))) \to (\forall x.(A(x) \to B(x)))$

Soluzione. Ecco una prova intuizionista del fatto che da $\forall x.(A(x) \land B(x))$ si può dedurre $(\forall x.A(x)) \land (\forall x.B(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x.(A(x) \land B(x))}{A(x) \land B(x)}}{A(x)}}{\forall x.A(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x.(A(x) \land B(x))}{A(x) \land B(x)}}{B(x)}}{\forall x.B(x)}}{(\forall x.A(x)) \land (\forall x.B(x))}$$

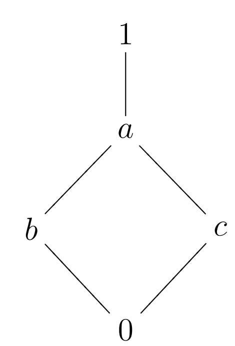
Una prova classica del fatto che da $\forall x.(A(x) \to \exists y.\neg A(y))$ si può dedurre $\exists y.\neg A(y)$ è la seguente:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\exists y.\neg A(y)]_c \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg\exists y.\neg A(y)]_c \\ \vdots \\ \forall y.A(y)\end{matrix}}{A(x)} \qquad \dfrac{\forall x.(A(x) \to \exists y.\neg A(y))}{A(x) \to \exists y.\neg A(y)}}{\exists y.\neg A(y)}}{\bot}}{\exists y.\neg A(y)}\ c$$

dove una prova classica che da $\neg\exists y.\neg A(y)$ si può dedurre $\forall y.A(y)$ è la seguente

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists\neg A(y) \qquad \dfrac{[\neg A(y)]_c}{\exists y.\neg A(y)}}{\bot}}{A(y)}\ c}{\forall y.A(y)}$$

Tuttavia essa non vale intuizionisticamente visto che possiamo falsificarla in una struttura con due elementi $\{0, 1\}$ basata sulla seguente algebra di Heyting



interpretando A nella funzione tale che $V(A)(0) = b$ e $V(A)(1) = c$. Infatti in questo caso otteniamo che

$$\begin{aligned}
V(\forall x.(A(x) \to \exists y.\neg A(y))) &= (V(A)(0) \to (\neg V(A)(0) \vee \neg V(A)(1))\wedge \\
&\ (V(A)(1) \to (\neg V(A)(0) \vee \neg V(A)(1))) \\
&= (b \to (c \vee b)) \wedge (c \to (c \vee b)) \\
&= 1 \wedge 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

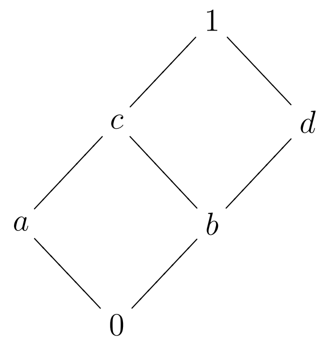
mentre

$$\begin{aligned}
V(\exists x.\neg A(x)) &= \neg V(A)(0) \vee \neg V(A)(1) \\
&= (b \to 0) \vee (c \to 0) \\
&= c \vee b \\
&= a
\end{aligned}$$

e $1 \to a = a \neq 1$.
Infine, la terza formula è valida intuizionisticamente come si può capire dalla seguente derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]_1}{\exists x.A(x)} \quad (\exists x.A(x)) \to (\forall x.(A(x) \to B(x)))}{\forall x.(A(x) \to B(x))}}{A(x) \to B(x)}}{B(x)}}{A(x) \to B(x)}\ 1}{\forall x.(A(x) \to B(x))}$$

Esercizio 4
Dimostrare che la seguente struttura ordinata è un'algebra di Heyting



(sugg.: si costruisca la sua rappresentazione topologica e si dimostri che si ottiene un'algebra di Heyting isomorfa)

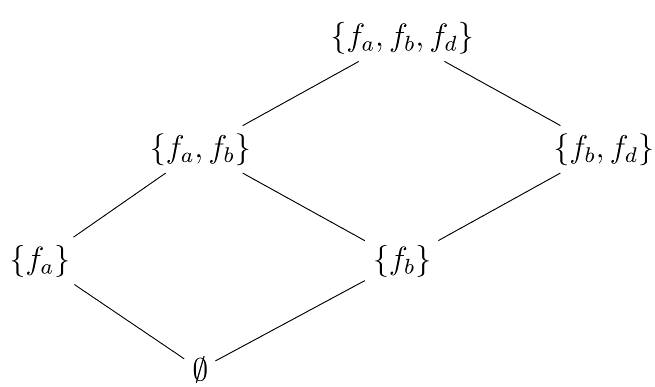
Soluzione. La struttura considerata è una struttura d'ordine finita in cui necessari sup e inf esistono; si tratta quindi solo di verificare che valga la proprietà distributiva. Il suggerimento dato permette di evitare le molte verifiche altrimenti necessarie. I punti necessari per la costruzione della topologia desiderata sono i tre filtri primi della struttura considerata, vale a dire

$$\begin{array}{rcl} f_a & = & \{a, c, 1\} \\ f_b & = & \{b, c, d, 1\} \\ f_d & = & \{d, 1\} \end{array}$$

Allora gli aperti della base della topologia sono quelli che si ottengono utilizzando la mappa ext, vale a dire

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{ext}(1) & = & \{f_a, f_b, f_d\} \\ \mathsf{ext}(a) & = & \{f_a\} \\ \mathsf{ext}(b) & = & \{f_b\} \\ \mathsf{ext}(c) & = & \{f_a, f_b\} \\ \mathsf{ext}(d) & = & \{f_b, f_d\} \\ \mathsf{ext}(0) & = & \emptyset \end{array}$$

ed essi esauriscono gli aperti della topologia visto che si tratta di una famiglia già chiusa per unioni arbitrarie ed intersezioni finite.
L'algebra di Heyting determinata da questa topologia è quindi la seguente



ed essa risulta chiaramente isomorfa alla struttura d'ordine data che risulta quindi godere della proprietà distributiva visto che tale proprietà vale per l'algebra di Heyting ottenuta dalla topologia.