COMPITO di LOGICA MATEMATICA
12 luglio 2006

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Quale è un ticket per la formula

$$\forall x.\exists y.A(x) \rightarrow B(y)?$$

Determinare due formule $A(-)$ e $B(-)$ tali che tale ticket esista sempre ed esibirlo esplicitamente.

Soluzione. Un ticket per la formula considerata è una funzione che ad ogni elemento x del dominio associa una coppia $\langle y, f\rangle$ la cui prima componente y è un elemento del dominio mentre il secondo elemento f è una funzione che associa ad ogni prova che A vale su x una prova che B vale su y.
La scelta più semplice di $A(-)$ e $B(-)$ che garantiscano l'esistenza di un tale ticket è considerare sia per $A(-)$ che per $B(-)$ la stessa formula; infatti in questo caso il ticket cercato diviene una funzione che associa ad ogni elemento x del dominio la coppia costituita dall'elemento stesso e la funzione identica.

Esercizio 2
Sia H un'algebra di Heyting e F un suo filtro. Dimostrare che F è massimale se e solo se, per ogni $x \in H$, se $x \notin F$ allora $\neg x \in F$.
(Si ricordi che un filtro è massimale se e solo se, per ogni $x \in H$, se $x \notin F$ allora $\uparrow (F \cup \{x\}) = H$ dove con $\uparrow (F \cup \{x\})$ si intende indicare il filtro generato dall'insieme $F \cup \{x\}$, vale a dire tutti gli elementi di H che sono maggiori o uguali al prodotto di un numero finito di elementi in $F \cup \{x\}$)

Soluzione.
Supponiamo che $x \notin F$ per dimostrare che $\uparrow (F \cup \{x\}) = H$ nell'ipotesi che, per ogni $x \in H$, se $x \notin F$ allora $\neg x \in F$. Allora ne segue che $\neg x \in F$ e quindi, per ogni $y \in H$, $y \in \uparrow (F \cup \{x\})$ visto che $\neg x \cdot x = 0_H \leq y$. Perciò $\uparrow (F \cup \{x\}) = H$ visto che l'altra inclusione è banale.
D'altra parte, se $x \notin F$ allora l'ipotesi che F sia massimale dice che $\uparrow (F \cup \{x\}) = H$ e quindi in particolare $\neg x \in \uparrow (F \cup \{x\})$ cioè esiste $z \in F$ tale che $z \cdot x \leq \neg x$ (si ricordi che F è un filtro ed è quindi chiuso per prodotti finiti). Ma allora $z \cdot x \cdot x \leq \neg x \cdot x$ e quindi $z \cdot x \leq 0_H$ che implica che $z \leq \neg x$ che vuol dire che $\neg x \in F$ visto che F è un filtro ed è quindi chiuso in sù.

Esercizio 3
Determinare, utilizzando la deduzione naturale, quali tra le seguenti formule sono valide intuizionisticamente e quali sono valide solo classicamente (si fornisca in questo secondo caso un controesempio intuizionista).

1. $\forall x.(A(x) \to (B(x) \lor C(x))) \to ((\forall x.A(x)) \to ((\exists x.B(x)) \lor (\exists x.C(x))))$
2. $\forall x.((A(x) \ \&\ B(x)) \to C(x)) \to ((\forall x.A(x) \to C(x)) \lor (\exists x.\neg B(x)))$

(sugg.: si noti che per dimostrare che la seconda formula non è intuizionisticamente valida basta una struttura con un solo elemento ...)

Soluzione.
Una prova intuizionista della prima formula è la seguente

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x.A(x)]_2}{A(x)} \quad \dfrac{[\forall x.A(x) \to (B(x) \lor C(x))]_1}{A(x) \to (B(x) \lor C(x))}}{B(x) \lor C(x)} \quad \dfrac{\dfrac{[B(x)]_3}{\exists x.B(x)}}{(\exists x.B(x)) \lor (\exists x.C(x))} \quad \dfrac{\dfrac{[C(x)]_3}{\exists x.C(x)}}{(\exists x.B(x)) \lor (\exists x.C(x))}}{(\exists x.B(x)) \lor (\exists x.C(x))}\,3}{(\forall x.A(x)) \to ((\exists x.B(x)) \lor (\exists x.C(x)))}\,2}{\forall x.(A(x) \to (B(x) \lor C(x))) \to ((\forall x.A(x)) \to ((\exists x.B(x)) \lor (\exists x.C(x))))}\,1
$$

mentre una prova classica della seconda si può ottenere come segue

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg((\forall x.A(x) \to C(x)) \lor (\exists x.\neg B(x)))]_c \\ \vert \\ \neg\forall x.A(x) \to C(x) \\ \vert \\ \exists x.A(x) \ \&\ \neg C(x)\end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x) \ \&\ \neg C(x)]_2}{A(x)} \quad \dfrac{\begin{matrix}[(\forall x.A(x) \to C(x)) \lor (\exists x.\neg B(x))]_c \\ \vert \\ \neg\exists x.\neg B(x) \\ \vert \\ \forall x.B(x)\end{matrix}}{B(x)}}{A(x) \ \&\ B(x)} \quad \dfrac{[\forall x.((A(x) \ \&\ B(x)) \to C(x))]_1}{(A(x) \ \&\ B(x)) \to C(x)}}{C(x)} \quad \dfrac{[A(x) \ \&\ \neg C(x)]_2}{\neg C(x)}}{\bot}}{\bot}\,2}{(\forall x.A(x) \to C(x)) \lor (\exists x.\neg B(x))}\,c}{\forall x.((A(x) \ \&\ B(x)) \to C(x)) \to ((\forall x.A(x) \to C(x)) \lor (\exists x.\neg B(x)))}\,1
$$

dove le deduzioni mancanti si possono facilmente costruire.
Si può tuttavia provare che tale formula non è intuizionisticamente valida utilizzando una interpretazione su una struttura su un solo elemento. Infatti, in tal caso la formula considerata si riduce alla formula proposizionale

$$((A \ \&\ B) \to C)) \to ((A \to C) \lor (\neg B))$$

che si vede subito non essere valida intuizionisticamente; infatti se essa fosse intuizionisticamente valida lo sarebbe anche ogni sua instanza per ogni scelta di A, B e C, ma allora ponendo $A \equiv \neg B$ e $C \equiv \bot$ si otterrebbe che

$$((\neg B \ \&\ B) \to \bot)) \to ((\neg B \to \bot) \lor (\neg B))$$

dovrebbe essere dimostrabile intuizionisticamente ma questo non può valere visto che tale formula è logicamente equivalente a

$$\neg\neg B \lor \neg B$$

che sappiamo non essere intuizionisticamente valida.

Esercizio 4
Dimostrare che la seguente formula è valida classicamente ma non intuizionisticamente costruendone un controesempio topologico

$$(\forall x.A \vee B(x)) \to (A \vee \forall x.B(x))$$

dove la formula A non contiene x libera.
(sugg.: si osservi che per trovare il controesempio richiesto non si può utilizzare nessun dominio finito visto che in questo caso la formula si ridurrebbe alla distributività della disgiunzione sulla congiunzione che vale anche intuizionisticamente; si costruisca quindi una struttura sull'insieme dei numeri naturali, il più piccolo cioè tra gli insiemi infiniti, utilizzando come topologia l'usuale topologia degli intervalli sui numeri reali interpretando la formula A nell'aperto $\mathsf{R} - \{0\}$, dopo avere dimostrato che si tratta infatti di un aperto, e trovando quindi una opportuna interpretazione per $B(-)$ su ogni numero naturale)

Soluzione.
La seguente è una prova classica in deduzione naturale della formula che stiamo considerando.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(A\vee\forall x.B(x))]_c\\ \vdots\\ \exists x.\neg B(x)\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x.A\vee B(x)]_1}{A\vee B(x)} \quad \dfrac{[A]_3}{A} \quad \dfrac{\dfrac{[B(x)]_3 \quad [\neg B(x)]_2}{\bot}}{A}}{A}\,3 \quad \dfrac{\dfrac{[\neg(A\vee\forall x.B(x))]_c \quad \dfrac{[A]_4}{A\vee\forall x.B(x)}}{\bot}}{\neg A}\,4}{\bot}}{\bot}\,2}{A\vee\forall x.B(x)}\,c}{(\forall x.A\vee B(x))\to(A\vee\forall x.B(x))}\,1
$$

dove la deduzione più a destra si può ottenere come segue

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(A\vee\forall x B(x)) \quad \dfrac{[\forall x.B(x)]_1}{A\vee\forall x.B(x)}}{\bot}}{\neg\forall x.B(x)}\,1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x.\neg B(x)]_{c2} \quad \dfrac{[\neg B(x)]_{c1}}{\exists x.\neg B(x)}}{\bot}}{B(x)}\,c1}{\forall x.B(x)}}{\bot}}{\exists x.\neg B(x)}\,c2
$$

Per far vedere che non è una formula intuizionisticamente valida, seguendo il suggerimento dato, dobbiamo dimostrare che $\mathsf{R} - \{0\}$ è un aperto della topologia considerata e trovare una opportuna interpretazione per la formula $B(-)$.
Per quanto riguarda la prima parte si osservi, ad esempio, che $\mathsf{R} - \{0\} = \bigcup_{n\in\mathsf{N}}(-n, -\frac{1}{n}) \cup \bigcup_{n\in\mathsf{N}}(\frac{1}{n}, n)$ ed è quindi un aperto in quanto unione di intervalli aperti.
Possiamo ora interpretare la formula $B(-)$ nella funzione che al numero naturale 0 associa l'intera retta reale e che ad ogni numero naturale $n > 0$ associa l'intervallo $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.
Allora abbiamo che, per ogni numero naturale n, l'interpretazione $(A \vee B(x))^{\sigma(x/n)}$ diviene l'unione di $\mathsf{R} - \{0\}$ con l'intera retta reale nel caso $n = 0$ o con un intervallo contenente lo

0 nel caso $n > 0$ e quindi coincide in ogni caso con l'intera retta reale per cui la formula $\forall x.A \vee B(x)$ viene comunque interpretata nell'intera retta reale.
D'altra parte la formula $\forall x.B(x)$ viene interpretata nell'insieme vuoto in quanto il più grande aperto contenuto in tutti gli intervalli $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ è l'insieme vuoto (si noti che l'insieme $\{0\}$ non è un aperto) per cui la formula $A \vee \forall x.B(x)$ viene interpretata nell'unione tra $\mathsf{R} - \{0\}$ e l'insieme vuoto e non coincide quindi con R.