COMPITO di LOGICA MATEMATICA
21 marzo 2007

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Si consideri la seguente proposizione:

$$(\exists x.\forall y.A) \to (\exists x.A[y := x])$$

Se ne fornisca prima una prova in deduzione naturale e se ne costruisca poi un *ticket*.

Soluzione.
Possiamo subito costruire la seguente prova in deduzione naturale intuizionista

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x.\forall y.A]_1 \quad \dfrac{\dfrac{[\forall y.A]_2}{A[y := x]}}{\exists x.A[y := x]}}{\exists x.A[y := x]}\,2}{(\exists x.\forall y.A) \to (\exists x.A[y := x])}\,1$$

Per quanto riguarda il ticket, quel che cerchiamo è una funzione che prende una qualsiasi prova w di $\exists x.\forall y.A$ e ci fornisce una prova di $\exists x.A[y := x]$. Ora guardando la prova in deduzione naturale si vede subito che l'elemento la cui esistenza è richiesta nella conclusione altro non è che l'elemento $\pi_1(w)$ la cui esistenza è garantita nella premessa. Inoltre la prova che tale elemento soddisfa $A[y := x]$ la possiamo ottenere subito applicando a $\pi_1(w)$ la funzione $\pi_2(w)$ che prova $\forall y.A[x := \pi_1(w)]$. Quindi il ticket cercato è

$$\lambda w.\langle \pi_1(w), \pi_2(w)(\pi_1)(w)\rangle$$

Esercizio 2
Fornire una valutazione predicativa che soddisfi tutte le proposizioni del seguente insieme dove R è un segno predicativo binario e Eq denota il predicato di uguaglianza.

$$\begin{aligned}\{\ &\forall x.\exists y.\mathsf{R}(x,y),\\ &\forall x.\exists y.\neg\mathsf{R}(x,y),\\ &\forall x.\forall y.\forall z.\mathsf{Eq}(x,y)\vee\mathsf{Eq}(x,z)\vee\mathsf{Eq}(y,z),\\ &\forall x.\forall y.\mathsf{R}(x,y)\to\neg\mathsf{Eq}(x,y)\ \}\end{aligned}$$

(sugg.: quanti elementi deve avere una struttura affinché tutte le formule dell'insieme dato siano vere?)

Soluzione.
È immediato verificare che la terza proposizione richiede che la struttura non abbia più di due elementi visto che se ne prendo tre due di loro devono essere uguali. D'altra parte la prima e la seconda condizione considerate assieme richiedono che la struttura abbia almeno due elementi visto che ce ne serve uno che soddisfi la relazione in cui interpretaremo R e un diverso elemento che la falsifichi.
Quindi dobbiamo sicuramente considerare una struttura che abbia esattamente due elementi e, a questo punto, è facile vedere che possiamo interpretare tutte le proposizioni in vero se interpretiamo Eq nella relazione identica e R nel suo complemento.

Esercizio 3
Si considerino le seguenti formule

1. $((A \wedge B) \to C) \to ((A \to C) \vee (B \to C))$
2. $((\exists x.A) \to B) \to \forall x.(A \to B)$ dove $x \notin \mathsf{FV}(B)$
3. $((\exists x.A) \to B) \to \forall x.(A \to B)$

Quali tra esse non sono dimostrabili, quali sono dimostrabili solo classicamente e quali sono dimostrabili anche intuizionisticamente?

Soluzione.
Per quanto riguarda la prima proposizione, la presenza della disgiunzione nella conclusione suggerisce che si tratti di una proposizione valida solo classicamente. Infatti possiamo costruirne una derivazione in deduzione naturale classica nel modo che segue

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(A \wedge B) \to C]_1$}
\AxiomC{$[\neg((A \to C) \vee (B \to C))]_c$}
\noLine\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine\UnaryInfC{$\neg(A \to C) \wedge \neg(B \to C)$}
\noLine\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine\UnaryInfC{$\neg(A \to C)$}
\noLine\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$[\neg((A \to C) \vee (B \to C))]_c$}
\noLine\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine\UnaryInfC{$\neg(A \to C) \wedge \neg(B \to C)$}
\noLine\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine\UnaryInfC{$\neg(B \to C)$}
\noLine\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine\UnaryInfC{B}
\BinaryInfC{$A \wedge B$}
\BinaryInfC{C}
\AxiomC{$[\neg((A \to C) \vee (B \to C))]_c$}
\noLine\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine\UnaryInfC{$\neg(A \to C) \wedge \neg(B \to C)$}
\noLine\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine\UnaryInfC{$\neg(A \to C)$}
\noLine\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine\UnaryInfC{$\neg C$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{c}
\UnaryInfC{$((A \to C) \vee (B \to C))$}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$((A \wedge B) \to C) \to ((A \to C) \vee (B \to C))$}
\end{prooftree}
$$

dove le deduzioni mancanti si possono trovare nel "taccuino".
Per quanto riguarda invece il fatto che la prova è solo classica basta osservare che ponendo $B \equiv \neg A$ e $C \equiv A \wedge \neg A$ si ottiene la proposizione

$$((A \wedge \neg A) \to (A \wedge \neg A)) \to ((A \to (A \wedge \neg A)) \vee (\neg A \to (A \wedge \neg A)))$$

che è intuizionisticamente equivalente alla proposizione

$$\neg A \vee \neg\neg A$$

che sappiamo non essere dimostrabile intuizionisticamente.
Una prova in deduzione naturale intuizionista della seconda proposizione è la seguente

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(\exists x.A) \to B]_1$}
\AxiomC{$[A]_2$}
\UnaryInfC{$\exists x.A$}
\BinaryInfC{B}
\UnaryInfC{$A \to B$}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$\forall x.(A \to B)$}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$((\exists x.A) \to B) \to \forall x.(A \to B)$}
\end{prooftree}
$$

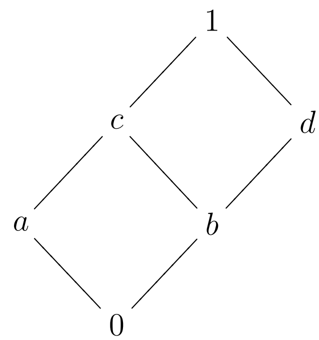
dove l'istanza di $\forall$-introduzione è corretta perchè nel momento della sua applicazione c'è una sola assunzione ancora attiva, cioè $(\exists x.A) \to B$, che tuttavia non contiene x libera visto che essa appare quantificata in $\exists x.A$ e non appare libera in B per ipotesi.
Infine l'ultima proposizione non è valida neppure classicamente visto che è possibile falsificarla in una struttura basata sull'algebra di Boole a due valori $\{\top, \bot\}$ su una struttura con due elementi $\{1, 2\}$. Infatti con tale interpretazione essa si può far diventare equivalente alla formula proposizionale

$$((A_1 \vee A_2) \to B_1) \to ((A_1 \to B_1) \wedge (A_2 \to B_2))$$

che si può falsificare con l'interpretazione seguente

$$\mathsf{V}(A_1) = \bot, \mathsf{V}(A_2) = \top, \mathsf{V}(B_1) = \top, \mathsf{V}(B_1) = \bot$$

Esercizio 4
Sia H la seguente algebra di Heyting:



Quante sono le sue diverse immagini tramite un omomorfismo suriettivo diverso dall'identità? Dimostrare che almeno una di esse non è un'algebra di Boole.
(sugg.: si ricordi il teorema di omomorfismo)

Soluzione.
Per il teorema di omomorfismo sappiamo che ci sono tanti morfismi suriettivi quanti sono i filtri dell'algebra H. Ora i filtri di H sono

$$F_1 = \{1\} \quad F_d = \{1, d\} \quad F_c = \{1, c\} \quad F_a = \{1, c, a\} \quad F_b = \{1, c, b, d\}$$

ma F_1 da luogo all'omomorfismo identico. Le possibili immagini diverse che rispettino quanto richiesto dall'esercizio sono quindi al massimo quattro. Tuttavia F_b e F_a hanno come immagine la stessa algebra di Boole di due elementi visto che $[0]_{F_b} = [a]_{F_b}$ e $[b]_{F_b} = [c]_{F_b} = [d]_{F_b} = [1]_{F_b}$ mentre $[a]_{F_a} = [c]_{F_a} = [1]_{F_a}$ e $[d]_{F_a} = [b]_{F_a} = [0]_{F_a}$ poichè a è il complemento di d in H.
Le classi determinate da F_d sono invece $[d]_{F_d} = [1]_{F_d}$, $[0]_{F_d} = [a]_{F_d}$ e $[c]_{F_d} = [b]_{F_d}$ e determinano quindi un'algebra di Heyting che non è algebra di Boole.
Infine le classi determinate da F_c sono $[c]_{F_c} = [1]_{F_c}$, $[0]_{F_c}$, $[a]_{F_c}$ e $[b]_{F_c} = [d]_{F_c}$ e si tratta di nuovo di un'algebra di Boole.
Concludendo le immagini diverse sono tre e solo una di esse, quella associata al filtro F_d è un algebra di Heyting che non è un algebra di Boole.