COMPITO di LOGICA MATEMATICA
2 aprile 2007

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Dimostrare in deduzione naturale che

$$\exists x.(A \wedge B) \to ((\exists x.A) \wedge (\exists x.B))$$

Verificare poi, utilizzando direttamente la definizione di interpretazione, che per ogni interpretazione $\mathsf{V}(-)$ in ogni struttura $\mathcal{U}$ vale che

$$\bigvee_{u \in U} \mathsf{V}^{\sigma(x/u)}(A \wedge B) \leq \mathsf{V}^{\sigma}((\exists x.A) \wedge (\exists x.B))$$

Vale l'altra implicazione?

Soluzione.
La dimostrazione in deduzione naturale è la seguente:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x.A \wedge B \qquad \dfrac{\dfrac{[A \wedge B]_1}{A}}{\exists x.A}}{\exists x.A}\,1 \qquad \dfrac{\exists x.A \wedge B \qquad \dfrac{\dfrac{[A \wedge B]_2}{B}}{\exists x.B}}{\exists x.B}\,2}{(\exists x.A) \wedge (\exists x.B)}$$

Per quanto riguarda la dimostrazione della disuguaglianza delle valutazioni si può procedere nel modo seguente:

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{V}^{\sigma}((\exists x.A) \wedge (\exists x.B)) & = & \mathsf{V}^{\sigma}(\exists x.A) \wedge \mathsf{V}^{\sigma}(\exists x.B) \\
& = & (\bigvee_{u \in U} \mathsf{V}^{\sigma(x/u)}(A)) \wedge (\bigvee_{v \in U} \mathsf{V}^{\sigma(x/v)}(B)) \\
& = & \bigvee_{u \in U, v \in U} (\mathsf{V}^{\sigma(x/u)}(A) \wedge \mathsf{V}^{\sigma(x/v)}(B)) \\
& \geq & \bigvee_{u \in U} \mathsf{V}^{\sigma(x/u)}(A \wedge B)
\end{array}$$

dove il passaggio dalla seconda alla terza uguaglianza dipende dal fatto che l'esistenza dell'implicazione permette di dimostrare la distributività dell'infimo sui supremi esistenti mentre la diseguaglianza tra la terza e la quarta riga dipende dal fatto che tutti gli elementi $\mathsf{V}^{\sigma(x/u)}(A \wedge B)$ al variare di $u \in U$ si ritrovano tra gli elementi di $\mathsf{V}^{\sigma(x/u)}(A) \wedge \mathsf{V}^{\sigma(x/v)}(B)$ al variare di $u \in U$ e $v \in U$.
Per quanto riguarda l'ultima domanda è immediato trovare un controesempio; si consideri per esempio $A \equiv (x = 0)$ e $B \equiv (x = 1)$.

Esercizio 2
Sia R una relazione binaria. Si formalizzino le seguenti affermazioni:

- R è transitiva.
- Ogni elemento ha almeno un R-successore.
- R è simmetrica
- Esiste un elemento che non sta in relazione con se stesso

Si fornisca quindi una dimostrazione in deduzione naturale del fatto che non esiste nessuna relazione che soddisfa tutte queste condizioni.

Soluzione.
Le quattro condizioni corrispondono alle seguenti formule del primo ordine

1. $\forall x \forall y \forall z. R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z)$
2. $\forall x \exists y. R(x, y)$
3. $\forall x \forall y. R(x, y) \to R(y, x)$
4. $\exists x. \neg R(x, x)$

Dire che non esiste alcuna relazione che le può soddisfare tutte assieme significa che da esse si può dedurre una contraddizione. La seguente è una prova in deduzione naturale di tale contraddizione:

$$
\dfrac{\exists x.\neg R(x,x) \qquad \dfrac{[\neg R(x,x)]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x \exists y. R(x,y)}{\exists y. R(x,y)} \qquad \dfrac{\dfrac{[R(x,y)]_2 \qquad \dfrac{[R(x,y)]_2 \qquad \dfrac{\forall x \forall y. R(x,y) \to R(y,x)}{R(x,y) \to R(y,x)}}{R(y,x)}}{R(x,y) \wedge R(y,x)} \qquad \dfrac{\forall x \forall y \forall z. R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)}{R(x,y) \wedge R(y,x) \to R(x,x)}}{R(x,x)}}{R(x,x)}\,{\scriptstyle 2}}{\bot}}{\bot}\,{\scriptstyle 1}
$$

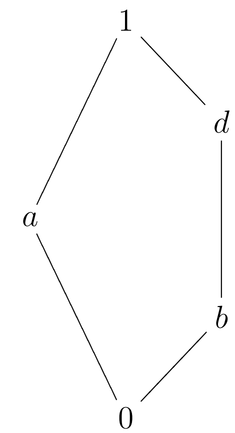
Esercizio 3
Sia B un algebra di Boole e F un suo filtro. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti

1. F è un filtro primo
2. $x \to y \in F$ se e solo se $x \in F$ implica $y \in F$.

(sugg.: si ricordi che nessun filtro contiene lo 0 e che un filtro F su un'algebra di Boole B è primo se e solo se, per ogni $x \in B$, $\nu x \in F$ se e solo se $x \notin F$)

Soluzione.
$(2 \to 1)$ Sappiamo che un filtro F di un algebra di Boole B è primo se e solo se, per ogni $x \in B$, $\nu x \in F$ se e solo se $x \notin F$. Ma questa è una immediata conseguenza della condizione 2 visto che essa dice che $\nu x \equiv x \to 0 \in F$ se e solo se $x \in F$ implica $0 \in F$, cioè $x \notin F$ visto che $0 \in F$ è sicuramente falso.
$(1 \to 2)$ Per dimostrare che se $x \to y \in F$ allora $x \in F$ implica $y \in F$ basta utilizzare il fatto che F è un filtro. Infatti, se $x \to y \in F$ e $x \in F$ allora $(x \to y) \wedge x \in F$, ma $(x \to y) \wedge x \leq y$ e quindi $y \in F$.
D'altra parte per dimostrare che $x \to y = \nu\nu(x \to y) \in F$, nell'ipotesi che F sia un filtro primo, basta far vedere $\nu(x \to y) \notin F$. Supponiamo quindi che $\nu(x \to y) \in F$; ma allora $x \in F$ e $\nu y \in F$, visto che in ogni algebra di Boole, $\nu(x \to y) \leq x$ e $\nu(x \to y) \leq \nu y$. Quindi l'ipotesi che $x \in F$ implica $y \in F$ insieme a $x \in F$ porta a $y \in F$ che a sua volta, insieme a $\nu y \in F$ implica che $y \wedge \nu y = 0 \in F$ che sappiamo non valere.

Esercizio 4
Determinare la minima algebra di Heyting in cui il seguente reticolo si può immergere:



(sugg.: costruire un opportuno spazio topologico utilizzando la tecnica dei filtri primi)

Soluzione.
È chiaro che il reticolo dato non è un'algebra di Heyting visto che si tratta di un reticolo non distributivo. Seguendo allora il suggerimento possiamo dapprima trovare i filtri primi sul reticolo considerato

$$F_a = \{a, 1\} \quad F_d = \{d, 1\} \quad F_b = \{b, d, 1\}$$

e considerarli poi come punti di una spazio topologico la cui base è data dalle estensioni degli elementi del reticolo, cioè

$$\mathsf{ext}(1) = \{F_a, F_d, F_b\} \quad \mathsf{ext}(a) = \{F_a\} \quad \mathsf{ext}(d) = \{F_d, F_b\} \quad \mathsf{ext}(b) = \{F_b\} \quad \mathsf{ext}(0) = \emptyset$$

Visto che sappiamo che la mappa $\mathsf{ext}(-)$ è chiusa per intersezione, per ottenere uno spazio topologico tutto ciò che dobbiamo fare è aggiungere le unioni mancanti; nel nostro caso l'unica unione mancante è $\mathsf{ext}(a) \cup \mathsf{ext}(b)$. Quindi l'algebra di Heyting determinata dall'insieme degli aperti di questo spazio topologico è la seguente ed è chiaro che è la minima algebra di Heyting in cui la mappa $\mathsf{ext}(-)$ immerge il reticolo dato