COMPITO di LOGICA MATEMATICA
18 marzo 2008

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Si consideri la seguente proposizione

$$(\forall x.\exists y.(P(x) \to Q(y)) \to ((\exists x.P(x)) \to (\exists y.Q(y)))$$

Se ne dia una dimostrazione in deduzione naturale e se ne determini un ticket.

Soluzione.
La seguente è una possibile prova della formula considerata in deduzione naturale intuizionista.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x.P(x) \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x.\exists y.P(x) \to Q(y)]_3}{\exists y.P(x) \to Q(y)} \qquad \dfrac{\dfrac{[P(x) \to Q(y)]_1 \quad [P(x)]_2}{Q(y)}}{\exists y.Q(y)}}{\exists y.Q(y)}\;1}{\exists y.Q(y)}\;2}{(\exists x.P(x)) \to (\exists y.Q(y))}}{(\forall x.\exists y.(P(x) \to Q(y)) \to ((\exists x.P(x)) \to (\exists y.Q(y)))}\;3$$

È ora facile ricostruire, guidati dalla prova in deduzione naturale, il ticket desiderato. Infatti, se chiamiamo z il generico ticket per $\forall x.\exists y.P(x) \to Q(y)$ e w il generico ticket per $\exists x.P(x)$ allora $\pi_2(w)$ è un ticket per $P(\pi_1(w))$ e quindi $z(\pi_1(w))$ è un ticket per $\exists y.P(\pi_1(w)) \to Q(y)$.
Perciò $\pi_2(z(\pi_1(w)))$ è un ticket per $P(\pi_1(w)) \to Q(\pi_1(z(\pi_1(w))))$ e quindi $\pi_2(z(\pi_1(w)))(\pi_2(w))$ è un ticket per $Q(\pi_1(z(\pi_1(w))))$.
Ne segue perciò che $\langle \pi_1(z(\pi_1(w))), \pi_2(z(\pi_1(w)))(\pi_2(w)) \rangle$ è un ticket per $\exists y.Q(y)$ e quindi il ticket da noi cercato è

$$\lambda z.\lambda w.\langle \pi_1(z(\pi_1(w))), \pi_2(z(\pi_1(w)))(\pi_2(w)) \rangle$$

Esercizio 2
Si considerino le seguenti formule

1. $\forall x.\forall y.(R(x,y) \to \exists z.(R(z,x) \ \& \ \neg R(z,y)))$
2. $\forall x.\exists y.R(x,y)$
3. $\forall x.\forall y.\forall z.((R(x,y) \ \& \ R(y,z)) \to R(x,z))$

Si dimostri dapprima semanticamente che l'insieme costituito da due qualunque di tali formule è soddisfacibile esibendone un modello (= struttura+valutazione) e si dimostri poi sintatticamente che l'insieme costituito da tutte e tre le formule non è soddisfacibile utilizzando la deduzione naturale.

Soluzione.
Per quanto riguarda le prime due formule un modello è costituito da un qualsiasi insieme che abbia almeno due elementi interpretando il segno predicativo R nella relazione $\neq$.
D'altra parte la seconda e la terza formula vengono rese vere su un qualsiasi insieme non vuoto interpretando il segno predicativo R nella relazione sempre vera mentra la prima e la terza formula sono soddisfatte ancora su un qualsiasi insieme non vuoto interpretando il segno predicativo R nella relazione sempre falsa.
Una prova della non soddisfacibilità contemporanea delle tre formule è la seguente

$$\dfrac{\dfrac{\forall x.\exists y.R(x,y)}{\exists y.R(x,y)} \qquad \dfrac{\dfrac{[R(x,y)]_1 \qquad \dfrac{\forall x.\forall y.R(x,y) \to \exists z.(R(z,x) \wedge \neg R(z,y))}{R(x,y) \to \exists z.(R(z,x) \wedge \neg R(z,y))}}{\exists z.R(z,x) \wedge \neg R(z,y)} \qquad \dfrac{\dfrac{[R(z,x) \wedge \neg R(z,y)]_2}{\neg R(z,y)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[R(z,x) \wedge \neg R(z,y)]_2}{R(z,x)} \qquad [R(x,y)]_1}{R(z,x) \wedge R(x,y)} \qquad \dfrac{\forall x.\forall y.\forall z.((R(x,y) \ \& \ R(y,z)) \to R(x,z))}{(R(z,x) \wedge R(x,y)) \to R(z,y)}}{R(z,y)}}{\bot}}{\bot}\,2}{\bot}\,1$$

Esercizio 3
Dimostrare la seguente proposizione

$$(A \to (A \land B \land C)) \lor (B \to (A \land B \land C)) \lor (C \to (A \land B \land C))$$

utilizzando la deduzione naturale classica e mostrare quindi che essa non può valere intuizionisticamente.

Soluzione.
Facendo ampio uso del "taccuino" e indicando con X la formula che vogliamo dimostrare otteniamo la seguente prova classica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}[\neg X]_c\\ \vdots\\ \neg(A \to (A \land B \land C)) \land \neg(B \to (A \land B \land C)) \land \neg(C \to (A \land B \land C))\end{array}}{\neg(A \to (A \land B \land C))}\\ \vdots\\ A \land \neg(A \land B \land C)\end{array}}{A} \quad \begin{array}{c}[\neg X]_c\\ \vdots\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[\neg X]_c\\ \vdots\\ C\end{array}}{A \land B \land C} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}[\neg X]_c\\ \vdots\\ \neg(A \to (A \land B \land C)) \land \neg(B \to (A \land B \land C)) \land \neg(C \to (A \land B \land C))\end{array}}{\neg(A \to (A \land B \land C))}\\ \vdots\\ A \land \neg(A \land B \land C)\end{array}}{\neg(A \land B \land C)}}{\bot}}{(A \to (A \land B \land C)) \lor (B \to (A \land B \land C)) \lor (C \to (A \land B \land C))}\ c$$

Un modo veloce per vedere che non può essere dimostrabile intuizionisticamente è quello di considerarne la particolare istanza ottenuta sostituendo A al posto di B e $\neg A$ al posto di C. Infatti in questo caso otteniamo

$$(A \to (A \land A \land \neg A)) \lor (A \to (A \land A \land \neg A)) \lor (\neg A \to (A \land A \land \neg A))$$

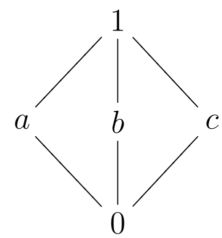
che è intuizionisticamente logicamente equivalente a

$$(A \to (A \land \neg A)) \lor (\neg A \to (A \land \neg A))$$

che a sua volta si riduce a $\neg A \lor \neg\neg A$ che sappiamo non essere intuizionisticamente valida.

Esercizio 4

Determinare la minima algebra di Heyting in cui il seguente reticolo si può immergere:



(sugg.: costruire un opportuno spazio topologico utilizzando la tecnica dei filtri primi)

Soluzione.

Il reticolo considerato non è sicuramente un'algebra di Heyting visto che non è distributivo. Per trovare un'algebra di Heyting in cui immergerlo dobbiamo aggiungere i sup necessari a renderlo distributivo. Visto che gli aperti di uno spazio topologico sono sicuramente un'algebra di Heyting cerchiamo di trovare lo spazio topologico adatto modificando opportunamente la tecnica dei filtri primi. I filtri su questo reticolo sono

$$F_a = \{a, 1\}, F_b = \{b, 1\}, F_c = \{c, 1\}$$

e possiamo costruire su di essi uno spazio topologico i cui aperti costituscono l'algebra di Heyting richiesta. La base per tale spazio topologico si ottiene considerando le estensioni degli elementi del reticolo:

$$\mathsf{ext}(0) = \emptyset, \mathsf{ext}(a) = \{F_a\}, \mathsf{ext}(b) = \{F_b\}, \mathsf{ext}(c) = \{F_c\}, \mathsf{ext}(1) = \{F_a, F_b, F_c\}$$

ma tale base, pur essendo chiusa per intersezione, non contiene tutte le unioni necessarie. Per ottenere il nostro spazio topologico dobbiamo quindi aggiungere le unioni mancanti, vale a dire

$$\mathsf{ext}(a) \cup \mathsf{ext}(b) = \{F_a, F_b\}, \mathsf{ext}(a) \cup \mathsf{ext}(c) = \{F_a, F_c\}, \mathsf{ext}(b) \cup \mathsf{ext}(c) = \{F_b, F_c\}$$

ottenendo