COMPITO di LOGICA MATEMATICA
3 aprile 2008

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Sia B un'algebra di Boole e sia F un suo sottoinsieme non vuoto tale che, per ogni $y_1, \ldots, y_n \in F$, $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \neq 0$. Dimostrare che l'insieme

$$\uparrow F \equiv \{x \in \mathsf{B} \mid \text{esistono } y_1, \ldots y_n \in F \text{ tali che } y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \leq x\}$$

è un filtro di B.
Dimostrare poi che nel caso F sia costituito da un solo elemento, cioè $F = \{c\}$, allora il filtro $\uparrow F = \{x \in \mathsf{B} \mid c \leq x\}$ è primo se e solo se vale la seguente condizione per ogni $a, b \in \mathsf{B}$,

$$(\text{per ogni } w \in \mathsf{B}, a \leq w \text{ e } b \leq w \text{ implica } c \leq w) \text{ se e solo se } (c \leq a \text{ o } c \leq b)$$

Soluzione. Dobbiamo dimostrare che $\uparrow F$ soddisfa le condizioni richieste. Prima di tutto abbiamo che $0 \notin \uparrow F$ visto per ipotesi non ci sono $y_1, \ldots, y_n \in F$ tali che $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n = 0$. Inoltre $1 \in \uparrow F$ visto che basta prendere un qualsiasi elemento y in F, che per ipotesi non è vuoto, per ottenere che $y \leq 1$. Per di più, se $x \in \uparrow F$ e $x \leq y$ allora esistono $y_1, \ldots, y_n \in F$ tali che $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \leq x$ e quindi $x \leq y$ implica $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \leq y$. Infine, se $x_1, x_2 \in \uparrow F$ allora esistono $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots z_m \in F$ tali che $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \leq x_1$ e $z_1 \wedge \ldots \wedge z_m \leq x_2$; quindi $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \wedge z_1 \wedge \ldots \wedge z_m \leq x_1 \wedge x_2$.
Per quanto riguarda la seconda parte della domanda, cominciamo osservando che, per ogni $a, b, c \in \mathsf{B}$, $c \leq a \vee b$ se e solo se, per ogni $w \in \mathsf{B}$, $a \leq w$ e $b \leq w$ implica $c \leq w$. Infatti, se $c \leq a \vee b$ e w è un qualunque elemento di B tale che $a \leq w$ e $b \leq w$ allora $a \vee b \leq w$ e quindi $c \leq a \vee b$ implica $c \leq w$; d'altra parte se segliamo come w proprio $a \vee b$ dal fatto che, per ogni $w \in \mathsf{B}$, $a \leq w$ e $b \leq w$ implica $c \leq w$ otteniamo che se $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$ allora $c \leq a \vee b$ e naturalmente $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$ valgono per definizione.
Ora in virtù di questa osservazione valgono le seguenti equivalenze

$$\begin{array}{lll}
\text{il filtro } \uparrow \{c\} \text{ è primo} & \text{se e solo se} & \text{per ogni } a, b \in \mathsf{B},\ a \vee b \in \uparrow \{c\} \text{ se e solo se} \\
& & \qquad\qquad\qquad\qquad a \in \uparrow \{c\} \text{ o } b \in \uparrow \{c\} \\
& \text{se e solo se} & \text{per ogni } a, b \in \mathsf{B},\ c \leq a \vee b \text{ se e solo se } c \leq a \text{ o } c \leq b \\
& \text{se e solo se} & \text{per ogni } w \in \mathsf{B},\ a \leq w \text{ e } b \leq w \text{ implica } c \leq w \text{ se e solo se} \\
& & \qquad\qquad\qquad\qquad c \leq a \text{ o } c \leq b
\end{array}$$

Esercizio 2
Determinare quali delle seguenti formule sono non dimostrabili (fornendo una struttura che la falsifichi), sono dimostrabili solo classicamente (fornendone una prova in deduzione naturale classica e una struttura intuizionistica che le falsifichi), sono dimostrabili anche intuizionisticamente (fornendone una prova in deduzione naturale intuizionista).

1. $(A \to B) \vee (B \to C)$
2. $((\forall x.\neg A(x)) \vee (\forall x.B(x))) \to (\exists x.(A(x) \wedge \neg B(x)))$
3. $((\exists x.A(x)) \to (\forall x.(A(x) \to B))) \to ((\exists x.A(x)) \to B)$ dove $x \notin \mathsf{FV}(B)$.

Soluzione.
Ecco una prova classica della prima formula (utilizzando il "taccuino")

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}[\neg((A \to B) \vee (B \to C))]_c \\ \vdots \\ \neg(A \to B) \wedge \neg(B \to C)\end{array}}{\neg(A \to B)} \\ \vdots \\ A \wedge \neg B\end{array}}{\neg B} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}[\neg((A \to B) \vee (B \to C))]_c \\ \vdots \\ \neg(A \to B) \wedge \neg(B \to C)\end{array}}{\neg(B \to C)} \\ \vdots \\ B \wedge \neg C\end{array}}{B}}{\bot}}{(A \to B) \vee (B \to C)}\ c
$$

Un'algebra di Heyting che mostra che non si tratta di una formula intuizionisticamente valida è la seguente

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d, no head] & \\
 & * \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
a \arrow[dr, no head] & & b \arrow[dl, no head] \\
 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

con interpretazione $V(A) = a$, $V(B) = b$ e $V(C) = a$.

Consideriamo ora la seconda formula. Si tratta di una implicazione e se il suo antecedente $((\forall x.\neg A(x)) \vee (\forall x.B(x)))$ fosse interpretato in vero allora dovrebbe essere vero uno dei due disgiunti e sia che si tratti del primo che del secondo si potrebbe dedurne che dovrebbe essere interpretata in vero anche la formula $\forall x.(A(x) \to B(x))$ ma questo implicherebbe che si dovrebbe necessariamente interpretare in falso la formula $\exists x.(A(x) \wedge \neg B(x))$ che è il conseguente della formula che stiamo considerando. Per vedere che si tratta quindi di una formula che non è neppure classicamente dimostrabile basta trovare una struttura e una interpretazione che renda vero il suo antecedente e per far questo qualunque struttura

va bene purchè si interpreti il simbolo predicativo A nella funzione costantemente falsa o il simbolo predicativo B nella funzione costantemente vera.
La terza formula si può invece dimostrare in logica intuizionista.

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x.A(x)]_1 \qquad \dfrac{[A(x)]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]_2}{\exists x.A(x)} \qquad (\exists x.A(x)) \to (\forall x.(A(x) \to B))}{\forall x.(A(x) \to B)}}{A(x) \to B}}{B}\,2}{B}}{(\exists x.A(x)) \to B}\,1$$

Esercizio 3
Dimostrare che in ogni struttura il cui supporto sia un insieme finito le due formule seguenti hanno sempre la stessa interpretazione sia nel caso classico che in quello intuizionista

$$(1) \quad \forall x.(A(x) \vee B) \qquad (2) \quad (\forall x.A(x)) \vee B$$

dove $x \notin \mathsf{FV}(B)$.
Cosa si può dire invece del caso in cui il supporto sia un insieme infinito?
(sugg.: si ricordi che il quantificatore universale viene interpretato come una congiunzione arbitraria e si cerchi poi di costruire una dimostrazione, eventualmente solo classica, delle implicazioni tra le due formule)

Soluzione.
Supponiamo che il supporto della struttura abbia n elementi. Allora l'interpretazione del segno predicativo A è una funzione il cui dominio ha n elementi e quindi essa diviene equivalente all'avere n formule $A_1, \ldots, A_n$ che vanno interpretate rispettivamente negli n valori di verità in cui si interpreta A. Quindi nel caso di un dominio finito con n elementi le due formule considerate equivalgono alle formule proposizionali

$$(A_1 \vee B) \wedge \ldots \wedge (A_n \vee B) \qquad (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \vee B$$

che hanno sempre lo stesso valore di verità visto che sia le algebre di Boole che quelle di Heyting sono distributive.
Prima di affrontare la questione del dominio infinito consideriamo le seguenti prove

$$\dfrac{(\forall x.A(x)) \vee B \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x.A(x)]_1}{A(x)}}{A(x) \vee B}}{\forall x.(A(x) \vee B)} \quad \dfrac{\dfrac{[B]_1}{A(x) \vee B}}{\forall x.(A(x) \vee B)}}{\forall x.(A(x) \vee B)}\ 1$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg((\forall x.A(x)) \vee B)]_c \\ \vdots \\ \dfrac{\neg\forall x.A(x) \wedge \neg B}{\neg\forall x.A(x)} \\ \vdots \\ \exists x.\neg A(x)\end{matrix} \qquad \dfrac{[\neg A(x)]_1 \quad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\forall x.(A(x) \vee B)}{A(x) \vee B} \\ \vdots \\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg((\forall x.A(x)) \vee B)]_c \\ \vdots \\ \dfrac{\neg\forall x.A(x) \wedge \neg B}{\neg B}\end{matrix}}{\ }}{\perp}}{\perp}\ 1}{(\forall x.A(x)) \vee B}\ c$$

che mostrano che in ogni struttura classica le due formule sono equivalenti.
Lo stesso non vale invece intuizionisticamente visto che possiamo considerare una struttura il cui supporto siano i numeri naturali mentre la struttura dei valori di verità è costituita dagli aperti della usuale topologia sui reali. Possiamo allora dare la seguente interpretazione: $\mathsf{V}(A)(0) = \mathsf{R}$, $\mathsf{V}(A)(n) = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, per $n \neq 0$, e $\mathsf{V}(B) = \mathsf{R} - \{0\}$ ottenendo

$$\mathsf{V}((\forall x.A(x)) \vee B) = (\mathsf{Int}(\bigcap_{n \in \omega} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))) \cup (\mathsf{R} - \{0\}) = \mathsf{R} - \{0\}$$

mentre

$$\mathsf{V}(\forall x.(A(x) \vee B)) = \mathsf{Int}(\bigcap_{n \in \omega}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \cup (\mathsf{R} - \{0\}))) = \mathsf{Int}(\bigcap_{n \in \omega} \mathsf{R}) = \mathsf{R}$$