

COMPITO di LOGICA MATEMATICA

14 luglio 2008

Nome:

Matricola:

Esercizio 1

Sia $\mathbf{B}$ un'algebra di Boole. Si provino i seguenti punti:

1. Sia $(U_i)_{i \in I}$ una famiglia di ultrafiltri di $\mathbf{B}$, cioè filtri primi. Dimostrare che $\bigcap_{i \in I} U_i$ è un filtro di $\mathbf{B}$.
2. Sia F un filtro di $\mathbf{B}$ e x un suo elemento. Dimostrare che se $x \notin F$ allora esiste un ultrafiltro U tale che $F \subseteq U$ e $x \notin U$.
3. Utilizzando i risultati precedenti, dimostrare che, per ogni filtro F di $\mathbf{B}$, $F = \bigcap_{F \subseteq U} U$.
4. Si consideri lo spazio topologico il cui insieme di punti $\text{Pt}(B)$ è costituito dall'insieme degli ultrafiltri di $\mathbf{B}$ mentre una base è costituita dagli insiemi $\text{ext}(a) = \{U \in \text{Pt}(B) \mid a \in U\}$ al variare di $a \in B$. Dimostrare che l'insieme $\{U \in \text{Pt}(B) \mid F \subseteq U\}$ è un chiuso di tale spazio topologico.

Soluzione.

Vediamo i vari punti richiesti.

1. Per dimostrare che $\bigcap_{i \in I} U_i$ è un filtro nell'ipotesi che tutti gli U_i , per $i \in I$, lo siano, basta verificare che soddisfa la definizione di filtro.
 - $1 \in \bigcap_{i \in I} U_i$ vale visto che, per ogni $i \in I$, $1 \in U_i$
 - se $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ e $x \leq y$ allora $y \in \bigcap_{i \in I} U_i$; infatti se $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ allora, per ogni $i \in I$, $x \in U_i$ e quindi dall'ipotesi che $x \leq y$ segue che $y \in U_i$, da cui si ottiene che $y \in \bigcap_{i \in I} U_i$.
 - se $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ e $y \in \bigcap_{i \in I} U_i$ allora $x \wedge y \in \bigcap_{i \in I} U_i$; infatti se $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ e $y \in \bigcap_{i \in I} U_i$ allora, per ogni $i \in I$, $x \in U_i$ e $y \in U_i$; quindi $x \wedge y \in U_i$, da cui si ottiene che $x \wedge y \in \bigcap_{i \in I} U_i$.
2. Supponiamo che $x \notin F$ e consideriamo il filtro generato da $F \cup \{\nu x\}$, cioè l'insieme $\uparrow(F \cup \{\nu x\}) \equiv \{z \in B \mid (\exists y \in F) y \wedge \nu x \leq z\}$. Allora certamente $0 \notin \uparrow(F \cup \{\nu x\})$ perchè altrimenti esisterebbe $y \in F$ tale che $y \wedge \nu x \leq 0$ e quindi $y \leq \nu \nu x = x$ e quindi x apparterrebbe a F contro l'ipotesi.

Possiamo ora costruire una prova sulla falsa riga di quella fatta a lezione e ottenere che esiste un filtro primo, i.e. un ultrafiltro nel caso di un'algebra di Boole, che estende il filtro $\uparrow(F \cup \{\nu x\})$, che include 1 ed esclude 0 (ogni filtro lo fa). In questo modo otteniamo quindi un ultrafiltro che include F e contiene νx ma non 0 e che deve perciò escludere x .

3. Bisogna dimostrare che valgono le due inclusioni. Ora $F \subseteq \bigcap_{F \subseteq U} U$ vale banalmente visto che F è incluso in ognuno degli ultrafiltri che compaiono nell'intersezione.

D'altra parte se $x \notin F$ allora l'esercizio precedente ci assicura che esiste un ultrafiltro U che include F e che non contiene x ; perciò U è uno degli ultrafiltri che appaiono nell'intersezione e quindi si deduce subito che $x \notin \bigcap_{F \subseteq U} U$.

4. Per quanto riguarda il complementare dell'insieme $\{U \in \mathbf{Pt}(B) \mid F \subseteq U\}$ abbiamo la seguente sequenza di uguaglianze

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}\{U \in \mathbf{Pt}(B) \mid F \subseteq U\} &= \{V \in \mathbf{Pt}(B) \mid F \not\subseteq V\} \\
 &= \{V \in \mathbf{Pt}(B) \mid (\exists a \in F) a \notin V\} \\
 &= \{V \in \mathbf{Pt}(B) \mid (\exists a \in F) \nu a \in V\} \\
 &= \{V \in \mathbf{Pt}(B) \mid (\exists a \in F) V \in \mathbf{ext}(\nu a)\} \\
 &= \bigcup_{a \in F} \mathbf{ext}(\nu a)
 \end{aligned}$$

Esso risulta quindi un aperto in quanto unione di aperti della base. Se ne conclude quindi che $\{U \in \mathbf{Pt}(B) \mid F \subseteq U\}$ è un chiuso in quanto complementare di un aperto.

Esercizio 2

Supponendo che esista una proposizione S tale che $S \leftrightarrow (S \rightarrow A)$ dimostrare A in deduzione naturale intuizionista. Supponendo poi che esista una proposizione S tale che $S \leftrightarrow (\neg S \wedge A)$ dimostrare $\neg A$ in deduzione naturale intuizionista.

Soluzione.

Vediamo come risolvere le due parti dell'esercizio.

Per quanto riguarda la prima parte vediamo prima di tutto che se esiste una proposizione S con la proprietà richiesta allora tale proposizione deve essere dimostrabile:

$$\frac{\frac{[S]_1 \quad \frac{S \leftrightarrow (S \rightarrow A)}{S \rightarrow (S \rightarrow A)}}{S \rightarrow A} \quad \frac{A}{S \rightarrow A} \quad 1 \quad \frac{S \leftrightarrow (S \rightarrow A)}{(S \rightarrow A) \rightarrow S}}{S}$$

A partire da tale prova di S , che chiameremo π , possiamo allora costruire la seguente prova di A

$$\frac{\pi \quad \frac{S \leftrightarrow (S \rightarrow A)}{S \rightarrow (S \rightarrow A)}}{S \rightarrow A} \quad \pi \quad S \quad A$$

Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio possiamo invece procedere come segue. Prima di tutto dimostriamo che la proposizione S è una conseguenza della proposizione A con la seguente deduzione π :

$$\frac{[S]_1 \quad \frac{S \leftrightarrow (\neg S \wedge A)}{S \rightarrow (\neg S \wedge A)} \quad \frac{\neg S \wedge A}{\neg S} \quad \frac{[S]_1 \quad \frac{\perp}{\neg S} \quad 1}{\neg S \wedge A} \quad A \quad \frac{S \leftrightarrow (\neg S \wedge A)}{(\neg S \wedge A) \rightarrow S}}{S}$$

A questo punto si può dimostrare $\neg A$ nel modo che segue:

$$\frac{[A]_1 \quad \frac{\pi \quad S \leftrightarrow (\neg S \wedge A)}{S \rightarrow (\neg S \wedge A)} \quad \frac{[A]_1 \quad \frac{\pi \quad S}{\neg S \wedge A} \quad \frac{\perp}{\neg S}}{\neg A} \quad 1$$

Si considerino le seguenti formule

1. $\forall x. \forall y. (R(x, y) \rightarrow \exists z. (R(z, x) \ \& \ \neg R(z, y)))$
2. $\forall x. \exists y. R(x, y)$
3. $\forall x. \forall y. \forall z. ((R(x, y) \ \& \ R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$

Soluzione. Per quanto riguarda le prime due formule un modello è costituito da un qualsiasi insieme che abbia almeno due elementi interpretando il segno predicativo R nella relazione $\neq$.

D'altra parte la seconda e la terza formula vengono rese vere su un qualsiasi insieme non vuoto interpretando il segno predicativo R nella relazione sempre vera mentre la prima e la terza formula sono soddisfatte ancora su un qualsiasi insieme non vuoto interpretando il segno predicativo R nella relazione sempre falsa.

Una prova della non soddisfacibilità contemporanea delle tre formule è la seguente

$$\frac{\frac{\frac{[R(x, y)]_1}{\exists x. \exists y. R(x, y)} \quad \frac{\frac{\forall x. \forall y. R(x, y) \rightarrow \exists z. (R(z, x) \wedge \neg R(z, y))}{R(x, y) \rightarrow \exists z. (R(z, x) \wedge \neg R(z, y))} \quad \frac{\frac{[R(z, x) \wedge \neg R(z, y)]_2}{\neg R(z, y)}}{\perp} \quad \frac{\frac{[R(z, x) \wedge \neg R(z, y)]_2}{R(z, x)} \quad [R(x, y)]_1 \quad \frac{\forall x. \forall y. \forall z. ((R(x, y) \& R(y, z)) \rightarrow R(x, z))}{(R(z, x) \wedge R(x, y)) \rightarrow R(z, y)}}{R(z, y)} \quad \frac{\perp}{2}}{1}$$