COMPITO di LOGICA MATEMATICA
19 marzo 2009

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Trovare una prova in deduzione naturale intuizionista per la seguente proposizione e costruirne quindi un ticket:

$$(\forall x.\ A(x) \to B(x)) \to ((\exists x.\ A(x)) \to (\exists x.\ B(x)))$$

Soluzione.
Una prova in deduzione naturale della proposizione considerata è la seguente:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\exists x.\ A(x)]_2$}
\AxiomC{$[A(x)]_3$}
\AxiomC{$[\forall x.\ A(x) \to B(x)]_1$}
\UnaryInfC{$A(x) \to B(x)$}
\BinaryInfC{$B(x)$}
\UnaryInfC{$\exists x.\ B(x)$}
\RightLabel{3}
\BinaryInfC{$\exists x.\ B(x)$}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$(\exists x.\ A(x)) \to (\exists x.\ B(x))$}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$(\forall x.\ A(x) \to B(x)) \to ((\exists x.\ A(x)) \to (\exists x.\ B(x)))$}
\end{prooftree}
$$

Supponiamo ora che w sia un ticket per $\exists x.A(x)$; allora $\pi_2(w)$ è un ticket per $A(\pi_1(w))$. Quindi, se h è un ticket per $\forall x.\ A(x) \to B(x)$, ne segue che $h(\pi_1(w))$ è un ticket per $A(\pi_1(w)) \to B(\pi_1(w))$. Perciò $h(\pi_1(w))(\pi_2(w))$ è un ticket per $B(\pi_1(w))$ e quindi $\langle \pi_1(w), h(\pi_1(w))(\pi_2(w)) \rangle$ è un ticket per $\exists x.B(x)$. Possiamo quindi concludere che il ticket desiderato è

$$\lambda h.\lambda w.\langle \pi_1(w), h(\pi_1(w))(\pi_2(w)) \rangle$$

Esercizio 2
Dimostrare classicamente che

$$(1) \qquad \neg\forall x.\neg A \vdash \exists x.A$$

Dimostrare quindi che non può esistere una prova intuizionista dello stesso sequente (1)(si esibisca una struttura basata su un'algebra di Heyting ed una interpretazione che non la rende vera).
Si dimostri poi che

$$(2) \qquad \forall x.A \vee \neg A, \neg\forall x.\neg A \vdash \exists x.A$$

non si può falsificare in nessuna struttura intuizionista finita (sugg.: esibire una opportuna prova in deduzione naturale).

Soluzione. La seguente è una prova classica che da $\neg\forall x.\neg A$ segue $\exists x.A$

$$\dfrac{\dfrac{\neg\forall x.\neg A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x.A]_c \quad \dfrac{[A]_1}{\exists x.A}}{\bot}}{\neg A}\,1}{\forall x.\neg A}}{\bot}}{\exists x.A}\,c$$

Per falsificare il sequente basta considerare una struttura con un solo elemento $*$ sull'algebra di Heyting H costituita da tre elementi linearmente ordinati $0 \leq a \leq 1$. Infatti, se interpretiamo A nella funzione che associa a $*$ il valore di verità $a \in H$ otteniamo che $\sigma(\neg\forall x.\neg A) = 1$ mentre $\sigma(\exists x.A) = a$
Interpretare il sequente (2) in una struttura finita è equivalente ad interpretare il seguente sequente

$$(A_1 \vee \neg A_1), \ldots, (A_n \vee \neg A_n), \neg(\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_n) \vdash A_1 \vee \ldots \vee A_n$$

e tale sequente può essere dimostrato intuizionisticamente come segue

$$\dfrac{A_1 \vee \neg A_1 \quad \dfrac{[A_1]_1}{A_1 \vee \ldots \vee A_n} \quad \dfrac{A_2 \vee \neg A_2 \quad \dfrac{[A_2]_2}{A_1 \vee \ldots \vee A_n} \quad \begin{array}{c} \dfrac{A_n \vee \neg A_n \quad \dfrac{[A_n]_n}{A_1 \vee \ldots \vee A_n} \quad \dfrac{\dfrac{\neg(\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_n) \quad \dfrac{[\neg A_1]_1 \ldots [\neg A_n]_n}{\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_n}}{\bot}}{A_1 \vee \ldots \vee A_n}}{A_1 \vee \ldots \vee A_n}\,n \\ \vdots \\ A_1 \vee \ldots \vee A_n \end{array}}{A_1 \vee \ldots \vee A_n}\,2}{A_1 \vee \ldots \vee A_n}\,1$$

e non potrà quindi essere mai falsificato in un'algebra di Heyting.

Esercizio 3
Sia H un'algebra di Heying e G un suo sottoinsieme non vuoto. Dimostrare che l'insieme

$$\uparrow G \equiv \{x \in H \mid \exists y_1, \ldots, y_n \in G . y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \leq x\}$$

è un filtro di H (chiamato il *filtro generato* da G) nell'ipotesi che, per ogni $y_1, \ldots, y_n \in G$, $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \neq 0$.
Di dica ora *massimale* un filtro F di H tale che se $x \notin F$ allora $\uparrow (F \cup \{x\}) = H$.
Dimostrare che un filtro F è massimale se e solo se $a \rightarrow b \in F$ se e solo se $a \in F$ implica che $b \in F$ (sugg. Dimostrare separatamente i seguenti punti: (1) se un filtro è chiuso per la proprietà che se $a \in F$ implica $b \in F$ allora $a \rightarrow b \in F$ allora tale filtro è massimale, (2) in ogni filtro se $a \rightarrow b \in F$ e $a \in F$ allora $b \in F$, (3) se F è massimale e $a \in F$ implica $b \in F$ allora $a \rightarrow b \in F$).

Soluzione.
Per quanto riguarda la prima parte dell'esercizio dobbiamo dimostrare che valgono i seguenti quattro punti:

- $1 \in \uparrow G$. Visto che per ipotesi G non è vuoto, esiste qualche elemento $y \in G$ e $y \leq 1$ vale per ogni elemento di H.

- Se $x \in \uparrow G$ e $x \leq y$ allora $y \in \uparrow G$. Se $x \in \uparrow G$ allora esistono $y_1, \ldots, y_n \in G$ tali che $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \leq x$, ma allora per transitività otteniamo che $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \leq y$ e quindi $y \in \uparrow G$.

- Se $x \in \uparrow G$ e $y \in \uparrow G$ allora $x \wedge y \in \uparrow G$. Se $x \in \uparrow G$ allora esistono $x_1, \ldots, x_n \in G$ tali che $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq x$ e se $y \in \uparrow G$ allora esistono $y_1, \ldots, y_m \in G$ tali che $y_1 \wedge \ldots \wedge y_m \leq y$. Perciò $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_m \leq x \wedge y$ e quindi $x \wedge y \in \uparrow G$.

- $0 \notin \uparrow G$. Per ipotesi per ogni scelta di $y_1, \ldots, y_m \in G$ abbiamo che $y_1 \wedge \ldots \wedge y_m \neq 0$ e quindi $y_1 \wedge \ldots \wedge y_m \leq 0$ non può valere.

Passiamo ora alla seconda parte dell'esercizio seguendo il suggerimento:

- Se F è un filtro tale che $a \in F$ implica $b \in F$ se e solo se $a \rightarrow b \in F$ allora F è un filtro massimale. Supponiamo quindi che $x \notin F$ e dimostriamo che $\uparrow (F \cup \{x\}) = H$, cioè che, per ogni $y \in H$, $y \in \uparrow (F \cup \{x\})$. Ora, se $x \notin F$ allora l'ipotesi che $x \in F$ implica quel che voglio e, in particolare, implica che $0 \in F$. Quindi l'ipotesi dell'esercizio ci permette di concludere che $x \rightarrow 0 \in F$, ma allora, per ogni $y \in H$, abbiamo che $(x \rightarrow 0) \wedge x \leq 0 \leq y$, cioè $y \in \uparrow (F \cup \{x\})$.

- Se $a \rightarrow b \in F$ e $a \in F$ allora $b \in F$. Se $a \rightarrow b \in F$ e $a \in F$ allora $(a \rightarrow b) \wedge a \in F$, ma $(a \rightarrow b) \wedge a \leq b$ e quindi $b \in F$.

- Se F è un filtro massimale e $a \in F$ implica $b \in F$ allora $a \rightarrow b \in F$. Possiamo ragionare per casi. Se $a \in F$ allora l'ipotesi dell'esercizio implica che $b \in F$; ma $b \leq a \rightarrow b$, perchè $b \wedge a \leq b$, e quindi ne segue che $a \rightarrow b \in F$. D'altra parte, se $a \notin F$ allora, essendo F un filtro massimale, $\uparrow (F \cup \{a\}) = H$ e quindi esistono $y_1, \ldots, y_n \in F$ tali che $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \wedge a \leq 0$. Perciò $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \leq a \rightarrow 0$ e quindi $a \rightarrow 0 \in F$. Ma $a \rightarrow 0 \leq a \rightarrow b$, perchè $(a \rightarrow 0) \wedge a \leq 0 \leq b$, e quindi $a \rightarrow b \in F$.