COMPITO di LOGICA MATEMATICA
30 marzo 2009

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Verificare, utilizzando direttamente la definizione di valutazione, che la seguente proposizione

$$(\neg \forall x.\ A) \to (\exists x.\ \neg A)$$

vale in ogni struttura classica.

Soluzione.
Sia $\langle D, \mathcal{R}, \emptyset, \emptyset \rangle + \mathcal{B}$, dove $\mathcal{B}$ è un'algebra di Boole completa, la struttura e sia σ la valutazione cosiderate. Allora

$$\begin{array}{rll} \sigma((\neg \forall x.\ A) \to (\exists x.\ \neg A)) = 1 & \text{sse} & \sigma(\neg \forall x.\ A) \to \sigma(\exists x.\ \neg A) = 1 \\ & \text{sse} & \sigma(\neg \forall x.\ A) \leq \sigma(\exists x.\ \neg A) \\ & \text{sse} & \nu \bigwedge_{d \in D} \sigma(x/d)(A) \leq \bigvee_{d \in D} \sigma(x/d)(\neg A) \\ & \text{sse} & \nu \bigwedge_{d \in D} \sigma(x/d)(A) \leq \bigvee_{d \in D} \nu\sigma(x/d)(A) \end{array}$$

Quindi per concludere basta dimostrare che in ogni algebra di Boole completa vale che

$$\nu \bigwedge_{i \in I} a_i \leq \bigvee_{i \in I} \nu a_i$$

e questo si ottiene immediatamente osservando che, in un'algebra di Boole, se $\nu a \leq b$ allora $\nu b \leq a$. Infatti, adesso abbiamo che da $\nu a_i \leq \bigvee_{i \in I} \nu a_i$, che ovviamente vale per ogni $i \in I$, possiamo ottenere che $\nu \bigvee_{i \in I} \nu a_i \leq a_i$ e quindi $\nu \bigvee_{i \in I} \nu a_i \leq \bigwedge_{i \in I} a_i$ che porta a $\nu \bigwedge_{i \in I} a_i \leq \bigvee_{i \in I} \nu a_i$.

Esercizio 2
Si determini quali tra le seguenti proposizioni sono valide intuizionisticamente e quali solo classicamente, fornendo in questo un controesempio basato su un'algebra di Heyting.

1. $(\forall x.\exists y.(A(y) \to B(x))) \to (\exists y.\forall x.(A(y) \to B(x)))$
2. $((\exists x.A) \to (\forall x.\neg A)) \to (\forall x.\neg A)$
3. $\exists x.\forall y.(A(x) \to A(y))$

Soluzione.
Risolviamo i vari punti:

1. Prima di tutto notiamo che se $F(x) \to G(x)$ allora $(\forall x.F(x)) \to (\forall x.G(x))$ e se $F(y) \to G(y)$ allora $(\exists y.F(y)) \to (\exists y.G(y))$. Quindi, visto che sappiamo come dimostrare che $\exists y.(A(y) \to B(x)) \to ((\forall y.A(y)) \to B(x))$ siamo anche in grado di scrivere una prova di $\forall x.\exists y.(A(y) \to B(x)) \to \forall x.((\forall y.A(y)) \to B(x))$. Analogamente, siccome sappiamo dimostrare che $(A(y) \to (\forall x.B(x))) \to \forall x.(A(y) \to B(x))$ siamo anche capaci di dimostrare che $\exists y.(A(y) \to (\forall x.B(x))) \to \exists y.\forall x.(A(y) \to B(x))$.

   Quindi, se $\forall x.\exists y.(A(y) \to B(x))$ possiamo dimostrare che $\forall x.((\forall y.A(y)) \to B(x))$ e quindi, usando il 'taccuino', che $(\forall y.A(y)) \to (\forall x.B(x))$; perciò, utilizzando questa volta il 'taccuino classico' possiamo dimostrare anche che $\exists y.(A(y) \to (\forall x.B(x)))$ e quindi che $\exists y.\forall x.(A(y) \to B(x))$.

   La prova che otteniamo in tal modo è classica perchè abbiamo usato il 'taccuino classico'; nel terzo punto vedremo che tale uso è essenziale.

2. Ecco una dimostrazione intuizionista della proposizione considerata.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_1}{\exists x.A} \quad (\exists x.A) \to (\forall x.\neg A)}{\forall x.\neg A}}{\neg A} \qquad [A]_1}{\bot}}{\neg A}\;1}{\forall x.\neg A}$$

3. La proposizione considerata in questo punto è una conseguenza di una istanza della proposizione considerata nel primo punto ottenuta ponendo $B(-) \equiv A(-)$. Infatti, in questo caso la prima proposizione diviene

$$\forall x.\exists y.(A(y) \to A(x)) \to \exists y.\forall x.(A(y) \to A(x))$$

   e l'antecedente di questa implicazione è dimostrabile come segue

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]_1}{A(x)}}{A(y)[y := x] \to A(x)}\;1}{\exists y.(A(y) \to A(x))}}{\forall x.\exists y.(A(y) \to A(x))}$$

Possiamo ora mostrare che si tratta di una proposizione vera solo classicamente (e di conseguenza anche la proposizione considerata nel punto 1 è vera solo classicamente). Infatti, se la interpretiamo su una struttura con due elementi allora essa è equivalente alla proposizione

$$((A_1 \to A_1) \wedge (A_1 \to A_2)) \vee ((A_2 \to A_1) \wedge (A_2 \to A_2))$$

che a sua volta è logicamente equivalente a

$$(A_1 \to A_2) \vee (A_2 \to A_1)$$

visto che $A_1 \to A_1$ e $A_2 \to A_2$ vengono comunque interpretate in 1. Ora questa ultima proposizione si può falsificare nell'algebra di Heyting

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & 1 & \\
 & * \arrow[u] & \\
a \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

se interpretiamo A_1 in a e A_2 in b.

Esercizio 3
Sia H un'algebra di Heying e G un suo sottoinsieme non vuoto tale che, per ogni $y_1, \ldots, y_n \in G$, $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \neq 0$. Si chiama allora *filtro generato* da G il filtro definito come segue

$$\uparrow G \equiv \{x \in H \mid \exists y_1, \ldots, y_n \in G.y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \leq x\}$$

1. Dimostrare che $\uparrow G = \bigcap_{G \subseteq F \in \mathcal{F}} F$, dove con $\mathcal{F}$ indichiamo la collezione dei filtri di H, dimostrare cioè che $\uparrow G$ è il più piccolo filtro contenente G.

2. Di dica ora *massimale* un filtro F di H tale che se $x \notin F$ allora $\uparrow (F \cup \{x\}) = H$. Dimostrare che se F è un filtro massimale allora esso è anche un filtro primo.

3. Si supponga ora che H sia un algebra di Boole. Dimostrare che in questo caso accade anche che ogni filtro primo è massimale.

4. Si esibisca infine un esempio di algebra di Heyting che falsifica l'ultimo punto.

Soluzione.
Affrontiamo uno dopo l'altro i vari punti:

1. $\uparrow G \subseteq \bigcap_{G \subseteq F \in \mathcal{F}} F$ vale sicuramente visto che $\uparrow G$ è un filtro che contiene G giacchè $y \leq y$ vale per ogni $y \in G$.

   D'altra parte se $x \in \uparrow G$ allora esistono $y_1, \ldots, y_n \in G$ tali che $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \leq x$; ma, se F è un filtro che contiene G, $y_1, \ldots, y_n \in F$ e quindi $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \in F$, visto che un filtro è chiuso per $\wedge$, e perciò $x \in F$, visto che un filtro è chiuso verso l'alto.

2. Supponiamo che $a \vee b \in F$ e che $a \notin F$. Allora, visto che per ipotesi F è un filtro massimale, $\uparrow F \cup \{a\} = H$ e quindi esiste $x \in F$ tale che $x \wedge a \leq 0$; perciò $x \leq a \to 0$ e quindi $a \to 0 \in F$. Perciò $(a \to 0) \wedge (a \vee b) \in F$, ma

   $$(a \to 0) \wedge (a \vee b) = ((a \to 0) \wedge a) \vee ((a \to 0) \wedge b) = (a \to 0) \wedge b \leq b$$

   e quindi $b \in F$.

3. Supponiamo che $x \notin F$ per dimostrare che $\uparrow F \cup \{x\} = H$. Ma $x \vee \nu x = 1 \in F$, visto che per ipotesi siamo in un'algebra di Boole, e quindi $\nu x \in F$, visto che per ipotesi il filtro F è primo. Quindi, per ogni $y \in H$, $\nu x \wedge x = 0 \leq y$, cioè $y \in \uparrow F \cup \{x\}$.

4. Nell'algebra di Heyting $0 < a < 1$, $\{1\}$ è un filtro primo che non è massimale visto che si può estendere al filtro $\{1, a\} \neq H$.