COMPITO di LOGICA MATEMATICA

10 luglio 2009

Nome: Matricola:

Esercizio 1

Formalizzare, nel linguaggio del primo ordine, la seguente proposizione matematica e fornirne una prova in deduzione naturale: "Se R è una relazione irriflessiva, simmetrica e transitiva allora R è la relazione vuota".

Soluzione.

Una relazione R è:

irriflessiva	se e solo se	$\forall x.\neg R(x,x)$
simmetrica	se e solo se	$\forall x.\forall y.R(x,y) \to R(y,x)$
transitiva	se e solo se	$\forall x.\forall y.\forall z.(R(x,y) \land R(y,z)) \to R(x,z)$
vuota	se e solo se	$\forall x.\forall y.\neg R(x,y)$

La seguente è quindi una prova in deduzione naturale intuizionista del fatto che le prime tre implicano la quarta:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[R(x,y)]_1 \qquad \dfrac{[R(x,y)]_1 \qquad \dfrac{R\ \text{simmetrica}}{R(x,y) \to R(y,x)}}{R(y,x)}}{R(x,y) \land R(y,x)} \qquad \dfrac{R\ \text{transitiva}}{(R(x,y) \land R(y,x)) \to R(x,x)}}{R(x,x)} \qquad \dfrac{R\ \text{irriflessiva}}{\neg R(x,x)}}{\bot}}{\neg R(x,y)}\ 1}{\forall x.\forall y.\neg R(x,y)}
$$

Esercizio 2
Si determini quali tra le seguenti proposizioni sono valide intuizionisticamente, quali solo classicamente e quali non sono valide neppure classicamente, fornendo quando necessario un opportuno controesempio.

1. $((A \to B) \to A) \to A$
2. $((\forall x.L(x,e) \vee \neg L(x,a)) \wedge \exists x.L(x,a)) \to L(a,e)$
3. $(\forall x.C(x) \to A(x)) \to (\forall x.[\exists y.C(y) \wedge T(x,y)] \to [\exists y.A(y) \wedge T(x,y)])$

Soluzione.
Per quanto riguarda la prima si tratta di una proposizione valida classicamente ma non intuizionisticamente. Infatti la seguente è una sua prova classica:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A \to B) \to A]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_1 \quad [\neg A]_c}{\bot}}{B}}{A \to B}\,1}{A} \qquad [\neg A]_c}{\bot}\,c}{A}}{((A \to B) \to A) \to A}\,2$$

mentre si può costruire un controesempio intuizionista considerando l'algebra di Heyting di tre elementi linearmente ordinati $0 < a < 1$ e valutando A in a e B in 0. Infatti, in questo modo si ottiene che

$$V(((A \to B) \to A) \to A) = ((a \to 0) \to a) \to a = (0 \to a) \to a = 1 \to a = a \neq 1$$

La seconda invece non vale neppure classicamente visto che la si può falsificare in una struttura classica su un dominio $D = \{\mathsf{a}, \mathsf{e}\}$ di due elementi interpretando la costante a in a, la costante e in e e il predicato L nella funzione L definita ponendo $\mathsf{L}(\mathsf{a},\mathsf{a}) = 0$, $\mathsf{L}(\mathsf{a},\mathsf{e}) = 0$, $\mathsf{L}(\mathsf{e},\mathsf{a}) = 1$, $\mathsf{L}(\mathsf{e},\mathsf{e}) = 1$.
Infine la terza proposizione vale anche intuizionisticamente come mostra la seguente derivazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists y.C(y) \wedge T(x,y)]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[C(y) \wedge T(x,y)]_1}{C(y)} \quad \dfrac{\forall x.C(x) \to A(x)}{C(y) \to A(y)}}{A(y)} \qquad \dfrac{[C(y) \wedge T(x,y)]_1}{T(x,y)}}{A(y) \wedge T(x,y)}}{\exists y.A(y) \wedge T(x,y)}}{\exists y.A(y) \wedge T(x,y)}\,1}{[\exists y.C(y) \wedge T(x,y)] \to [\exists y.A(y) \wedge T(x,y)]}\,2}{\forall x.[\exists y.C(y) \wedge T(x,y)] \to [\exists y.A(y) \wedge T(x,y)]}$$

Esercizio 3

Sia H un'algebra di Heyting e si ricordi che un filtro F di H si dice massimale se $x \notin F$ implica che $\uparrow (F \cup \{x\}) = H$.

Dimostrare che, per un qualunque sottoinsieme non vuoto X di H tale che per ogni scelta di $x_1, \ldots, x_n \in X$ si abbia che $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \neq 0$, $\uparrow X$ è un filtro massimale se e solo se, per ogni $z \in H$, esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq z$ o $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq \nu z$.

Soluzione.

L'esercizio ci chiede di dimostrare due implicazioni; cominciamo quindi dimostrando che se $\uparrow X$ è un filtro massimale allora, per ogni $z \in H$, esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq z$ o $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq \nu z$.

Sia allora z un generico elemento di H e ragioniamo per casi:

- $z \in\uparrow X$. Allora per definizione di $\uparrow X$ sappiamo che esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq z$.

- $z \notin\uparrow X$. Allora, in virtù dell'ipotesi che $\uparrow X$ sia un filtro massimale possiamo dedurre che esiste $y \in\uparrow X$ tale che $y \wedge z \leq 0$, cioè che $y \leq \nu z$; ma allora esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq y \leq \nu z$

Vediamo adesso come dimostrare che se, per ogni $z \in H$, esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq z$ o $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq \nu z$ allora $\uparrow X$ è un filtro massimale.

Abbiamo già visto varie volte che, nelle ipotesi dell'esercizio, $\uparrow X$ è un filtro; ci basta quindi solo verificare che sia massimale. Supponiamo allora che z sia un elemento di H che non appartiene a $\uparrow X$; allora devono esistere $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq \nu z$ (non può infatti succedere che esistano $x_1, \ldots, x_m \in X$ tali che $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m \leq z$ altrimenti z starebbe in $\uparrow X$). Ma allora $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge z \leq \nu z \wedge z = 0$ e quindi $\uparrow (X \cup \{z\}) = H$ ma $\uparrow (X \cup \{z\}) \subseteq\uparrow (\uparrow X \cup \{z\})$ visto che $X \subseteq\uparrow X$.