COMPITO di LOGICA MATEMATICA
21 settembre 2009

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Dimostrare, utilizzando direttamente la definizione di interpretazione, che $\forall x.(A(x) \vee B)$ e $(\forall x.A(x)) \vee B$, dove $x \notin \mathsf{FV}(B)$, sono equivalenti in ogni interpretazione classica. (sugg.: si dimostri dapprima che per ogni x, y e z elementi di un'algebra di Boole si ha che $x \leq y \vee z$ se e solo se $x \wedge \nu z \leq y$)

Soluzione.
Notiamo prima di tutto che, seguendo la definizione di valutazione di una formula in un dominio D, abbiamo che

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{V}^\sigma(\forall x.(A(x) \vee B)) & = & \bigwedge_{d \in D} \mathsf{V}^{\sigma(x/d)}(A(x) \vee B) \\ & = & \bigwedge_{d \in D} (\mathsf{V}^{\sigma(x/d)}(A(x)) \vee \mathsf{V}^{\sigma(x/d)}(B)) \\ & = & \bigwedge_{d \in D} (\mathsf{V}^{\sigma(x/d)}(A(x)) \vee \mathsf{V}^{\sigma}(B)) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{V}^\sigma((\forall x.A(x)) \vee B) & = & \mathsf{V}^\sigma(\forall x.A(x)) \vee \mathsf{V}^\sigma(B) \\ & = & \bigwedge_{d \in D} \mathsf{V}^{\sigma(x/d)}(A(x)) \vee \mathsf{V}^\sigma(B) \end{array}$$

Quindi per risolvere l'esercizio basta far vedere che, in ogni algebra di Boole, $\bigwedge_{i \in I}(x_i \vee b) = \bigwedge_{i \in I} x_i \vee b$.
Un verso di questa uguaglianza è immediato visto che, per ogni $i \in I$, $\bigwedge_{i \in I} x_i \leq x_i$ e quindi $\bigwedge_{i \in I} x_i \vee b \leq x_i \vee b$ che porta a $\bigwedge_{i \in I} x_i \vee b \leq \bigwedge_{i \in I}(x_i \vee b)$.
Per dimostrare l'altra disuguaglianza possiamo sfruttare il suggerimento. Infatti si vede subito che se $x \leq y \vee z$ allora $x \wedge \nu z \leq (y \vee z) \wedge \nu z = (y \wedge \nu z) \vee (z \wedge \nu z) = (y \wedge \nu z) \vee 0 = y \wedge \nu z \leq y$ e se $x \wedge \nu z \leq y$ allora $x \leq x \vee z = (x \vee z) \wedge 1 = (x \vee z) \wedge (\nu z \vee z) = (x \wedge \nu z) \vee z \leq y \vee z$.
Quindi abbiamo che

$$\begin{array}{rll} \bigwedge_{i \in I}(x_i \vee b) \leq \bigwedge_{i \in I} x_i \vee b & \text{se e solo se} & \bigwedge_{i \in I}(x_i \vee b) \wedge \nu b \leq \bigwedge_{i \in I} x_i \\ & \text{se e solo se} & \bigwedge_{i \in I}(x_i \vee b) \wedge \nu b \leq x_i \text{ per ogni } i \in I \\ & \text{se e solo se} & \bigwedge_{i \in I}(x_i \vee b) \leq x_i \vee b \text{ per ogni } i \in I \end{array}$$

dove l'ultima disuguaglianza ovviamente vale.

Esercizio 2
Si determini quali tra le seguenti equivalenze sono valide intuizionisticamente e quali solo classicamente, fornendo una prova in deduzione naturale, e quali non sono valide neppure classicamente, fornendo quando necessario un opportuno controesempio.

1. $\exists x.\forall y.(P(x) \to Q(y)) \equiv \forall x.P(x) \to \exists y.Q(y)$
2. $\forall x.(A(x) \lor B) \equiv (\exists x.\neg A(x)) \to B$, $x \notin \mathsf{FV}(B)$

Soluzione.
La seguente è una prova in deduzione naturale intuizionista che $\forall x.P(x) \to \exists y.Q(y)$ segue da $\exists x.\forall y.(P(x) \to Q(y))$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x.\forall y.(P(x) \to Q(y))$}
\AxiomC{$[\forall y.(P(x) \to Q(y))]_1$}
\UnaryInfC{$P(x) \to Q(y)$}
\AxiomC{$[\forall x.P(x)]_2$}
\UnaryInfC{$P(x)$}
\BinaryInfC{$Q(y)$}
\UnaryInfC{$\exists y.Q(y)$}
\RightLabel{1}
\BinaryInfC{$\exists y.Q(y)$}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$\forall x.P(x) \to \exists y.Q(y)$}
\end{prooftree}
$$

Tuttavia l'altra implicazione non vale neppure classicamente. Infatti se consideriamo una interpretazione in un dominio su due elementi tale che P venga interpretato sempre in vero mentre Q venga interpretato in vero per uno dei due elementi e in falso per l'altra allora abbiamo che $\forall x.P(x) \to \exists y.Q(y)$ viene interpretato in vero mentre $\exists x.\forall y.(P(x) \to Q(y))$ viene interpretato in falso.
Per quanto riguarda la seconda equivalenza abbiamo che $(\exists x.\neg A(x)) \to B$ segue intuizionisticamente da $\forall x.(A(x) \lor B)$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\exists x.\neg A(x)]_3$}
\AxiomC{$\forall x.(A(x) \lor B)$}
\UnaryInfC{$A(x) \lor B$}
\AxiomC{$[\neg A(x)]_2$}
\AxiomC{$[A(x)]_1$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\doubleLine
\UnaryInfC{B}
\AxiomC{$[B]_1$}
\RightLabel{1}
\TrinaryInfC{B}
\RightLabel{2}
\BinaryInfC{B}
\RightLabel{3}
\UnaryInfC{$(\exists x.\neg A(x)) \to B$}
\end{prooftree}
$$

mentre l'altra implicazione vale solo classicamente; infatti

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg(A(x) \lor B)]_c$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg A(x) \land \neg B$}
\UnaryInfC{$\neg A(x)$}
\UnaryInfC{$\exists x.\neg A(x)$}
\AxiomC{$(\exists x.\neg A(x)) \to B$}
\BinaryInfC{B}
\AxiomC{$[\neg(A(x) \lor B)]_c$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg A(x) \land \neg B$}
\UnaryInfC{$\neg B$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{c}
\UnaryInfC{$A(x) \lor B$}
\UnaryInfC{$\forall x.(A(x) \lor B)$}
\end{prooftree}
$$

ma se consideriamo un dominio con un unico elemento $*$ e l'algebra di Heyting $0 \le a \le 1$ e valutiamo A su $*$ in a e B in 0 allora $(\exists x.\neg A(x)) \to B$ viene valutato in 1 mentre $\forall x.(A(x) \lor B)$ viene valutato in a.

Esercizio 3
Sia H un'algebra di Heyting.

- Dimostrare che un elemento $a \in H$ ha un complemento se e solo se $a \to 0$ è un complemento di a.
- Esibire poi un esempio di algebra di Heyting in cui esistano elementi diversi da 0 e 1 dotati di complemento assieme ad elementi che non hanno complemento.

Soluzione.
Se $a \to 0$ è un complemento di a allora è ovvio che esiste un complemento di a.
D'altra parte, se supponiamo che b sia un complemento di a allora per dimostrare che anche $a \to 0$ lo è, e per l'unicità del complemento in un reticolo distributivo $a \to 0$ coinciderà con b, dobbiamo far vedere due cose:

- $a \wedge (a \to 0) = 0$, che segue immediatamente dalla definizione di implicazione visto che $a \to 0 \leq a \to 0$ ovviamente vale,
- $a \vee (a \to 0) = 1$ che possiamo dimostrare osservando prima di tutto che $a \wedge b \leq 0$, visto che b per ipotesi è complemento di a, e quindi $b \leq a \to 0$, per la definizione di implicazione, e da questo si ricava che $1 = a \vee b \leq a \vee (a \to 0)$ di nuovo perchè b è complemento di a.

Un'algebra di Heyting che contiene elementi diversi da 0 e 1 dotati di complemento assieme ad elementi che non hanno complemento è la seguente

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & b & & d \\ a & & c & \\ & 0 & & \end{array}$$

Infatti $a \wedge d = 0$ e $a \vee d = 1$, e quindi a e d sono l'uno i complemento dell'altro, mentre si verifica velocemente che ne b ne c hanno complemento.