COMPITO di LOGICA MATEMATICA
11 dicembre 2009

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Nell'ipotesi che la variabile x non appaia libera in B, trovare un ticket per la proposizione $(\exists x.(A(x) \to B)) \to ((\forall x.A(x)) \to B)$.
(sugg.: trovarne prima una prova in deduzione naturale)

Soluzione.
Ecco una deduzione intuizionista di B a partire da $\exists x.(A(x) \to B)$ e $\forall x.A(x)$:

$$\dfrac{\exists x.(A(x) \to B) \qquad \dfrac{[A(x) \to B]_1 \qquad \dfrac{\forall x.A(x)}{A(x)}}{B}}{B}\ 1$$

Quindi, se w è un ticket per $\exists x.(A(x) \to B)$, cioè $\pi_2(w)$ è un ticket per $A(\pi_1(w)) \to B$, e f è un ticket per $\forall x.A(x)$, e quindi $f(\pi_1(w))$ è un ticket per $A(\pi_1(w))$, ne segue che $\pi_2(w)(f(\pi_1(w)))$ è un ticket per B. Il ticket cercato è quindi $\lambda w.\lambda f.\pi_2(w)(f(\pi_1(w)))$.

Esercizio 2
Si determini quali tra le seguenti equivalenze sono valide intuizionisticamente e quali solo classicamente, fornendo una prova in deduzione naturale, e quali non sono valide neppure classicamente, fornendo quando necessario un opportuno controesempio.

1. $\neg\neg A \to B \equiv A \to \neg\neg B$
2. $\forall x.(A(x) \to B(x)) \equiv \exists x.\forall y.(A(x) \to B(y))$

(suggerimento: nel secondo esercizio si dimostri dapprima che valgono le seguenti relazioni: $\forall x.(A(x) \to B(x)) \vdash \forall x.A(x) \to \forall y.B(y)$, $\forall x.A(x) \to \forall y.B(y) \vdash \exists x.(A(x) \to \forall y.B(y))$ e $\exists x.(A(x) \to \forall y.B(y)) \vdash \exists x.\forall y.(A(x) \to B(y)))$

Soluzione.
Il verso da sinistra a destra della prima equivalenza si può dimostrare intuizionisticamente come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_3 \quad [\neg A]_1}{\bot}}{\neg\neg A}\,1 \qquad \neg\neg A \to B}{B} \qquad [\neg B]_2}{\bot}}{\neg\neg B}\,2}{A \to \neg\neg B}\,3$$

mentre l'altro verso vale solo classicamente; infatti una prova classica si ottiene immediatamente utilizzando due volte la regola della doppia negazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg A]_1}{A} \qquad A \to \neg\neg B}{\neg\neg B}}{B}}{\neg\neg A \to B}\,1$$

mentre non può valere intuizionisticamente visto che identificando B con A avremmo che $A \to \neg\neg A$ implicherebbe $\neg\neg A \to A$ e noi sappiamo che $A \to \neg\neg A$ vale intuizionisticamente (vedi la prima deduzione qui sopra) mentre $\neg\neg A \to A$ non vale intuizionisticamente (per falsificarla basta un'algebra di Heyting di tre elementi).
Seguendo il suggerimento possiamo trovare una prova classica del verso da sinistra a destra della seconda equivalenza componendo le tre deduzioni seguenti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x.A(x)}{A(y)} \qquad \dfrac{\forall x.A(x) \to B(x)}{A(y) \to B(y)}}{B(y)}}{\forall y.B(y)}}{\forall x.A(x) \to \forall y.B(y)}$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\exists x.A(x)\to\forall y.B(y)]_c\\ \vdots\\ \forall x.\neg(A(x)\to\forall y.B(y))\end{array}}{\neg(A(x)\to\forall y.B(y))}\\ \vdots\\ A(x)\end{array}}{\forall x.A(x)} \qquad \forall x.A(x)\to\forall y.B(y)}{\forall y.B(y)} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\exists x.A(x)\to\forall y.B(y)]_c\\ \vdots\\ \forall x.\neg(A(x)\to\forall y.B(y))\end{array}}{\neg(A(x)\to\forall y.B(y))}\\ \vdots\\ \neg\forall y.B(y)\end{array}}{\bot}}{\exists x.(A(x)\to\forall y.B(y))}\ c
$$

dove le deduzioni mancanti si possono trovare nel “taccuino”.

$$
\dfrac{\exists x.(A(x)\to\forall y.B(y)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]_1 \quad [A(x)\to\forall y.B(y)]_2}{\forall y.B(y)}}{B(y)}}{A(x)\to B(y)}\ 1}{\forall y.(A(x)\to B(y))}}{\exists x.\forall y.(A(x)\to B(y))}}{\exists x.\forall y.(A(x)\to B(y))}\ 2
$$

La prova ottenuta è solo classica visto che nella seconda deduzione utilizziamo la regola del falso classico. In realtà non può esserci una prova intuizionista dell'implicazione cercata visto che interpretando su una struttura con due elementi otteniamo una proposizione equivalente a

$$(A_1 \to B_1) \wedge (A_2 \to B_2) \vdash ((A_1 \to B_1) \wedge (A_1 \to B_2)) \vee ((A_2 \to B_1) \wedge (A_2 \to B_2))$$

che si riduce a

$$(A_1 \to A_1) \wedge (A_2 \to A_2) \vdash ((A_1 \to A_1) \wedge (A_1 \to A_2)) \vee ((A_2 \to A_1) \wedge (A_2 \to A_2))$$

se identifichiamo B_1 con A_1 e B_2 con A_2. Ora, $(A_1 \to A_1) \wedge (A_2 \to A_2)$ vale in ogni struttura mentre $((A_1 \to A_1) \wedge (A_1 \to A_2)) \vee ((A_2 \to A_1) \wedge (A_2 \to A_2))$ è equivalente a $(A_1 \to A_2) \vee (A_2 \to A_1)$ e si può quindi falsificare in una struttura intuizionista (basta un'algebra di Heyting con cinque elementi).
L'altra implicazione non vale invece neppure classicamente visto che la si può falsificare in una struttura su due elementi a e b con la seguente interpretazione

$$\begin{array}{rclrcl} V(A)(a) & = & 0 & V(A)(b) & = & 1\\ V(B)(a) & = & 0 & V(B)(b) & = & 0 \end{array}$$

Esercizio 3
Sia B un algebra di Boole e F un suo filtro proprio. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti

1. F è un filtro massimale, cioè se G è un filtro proprio tale che $F \subseteq G$ allora $F = G$,

2. F è un filtro primo, cioè se $x \vee y \in F$ allora $x \in F$ o $y \in F$,

3. per ogni $x \in B$, $x \in F$ o $\nu x \in F$.

Quali tra le precedenti implicazioni continuano a valere se consideriamo un'algebra di Heyting invece che un'algebra di Boole?

Soluzione.
Analizziamo dapprima il caso dell'algebra di Boole.

- (1) implica (2). Supponiamo che $x \vee y \in F$ e che $x \notin F$. Allora $\uparrow (F \cup \{x\})$ è il filtro generato da $F \cup \{x\}$ e contiene strettamente F visto che $x \notin F$. Ora, visto che F per ipotesi è massimale $\uparrow (F \cup \{x\})$ non può essere un filtro proprio e quindi $0 \in \uparrow (F \cup \{x\})$, cioè esiste $w \in F$ tale che $w \wedge x \leq 0$; ne segue quindi che $w \leq \nu x$ e quindi $\nu x \in F$ da cui si ricava che $\nu x \wedge (x \vee y) = (\nu x \wedge x) \vee (\nu x \wedge y) = \nu x \wedge y \in F$ ma allora $y \in F$ visto che $\nu x \wedge y \leq y$.

- (2) implica (3). Immediato, visto che in ogni algebra di Boole $x \vee \nu x = 1 \in F$.

- (3) implica (1). Sia G è un filtro che estende propriamente F e supponiamo che $x \in G$. Ora, se $x \notin F$ allora per ipotesi $\nu x \in F$ e quindi $\nu x \in G$ segue da $F \subseteq G$. Perciò $0 = x \wedge \nu x \in G$ e quindi G non è proprio.

Ora la prima e la terza implicazione valgono anche nel caso in cui stiamo considerando un'algebra di Heyting e quindi se ne ricava immediatamante che vale anche (3) implica (2). Per quanto riguarda la seconda implicazione invece la prova data sopra non funziona perchè in generale $x \vee \nu x$ non è uguale ad 1 in un'algebra di Heyting. Anzi si vede subito che se consideriamo l'algebra di Heyting di tre elementi $\{0, a, 1\}$ e il filtro $F = \{1\}$ otteniamo un filtro primo che non è massimale. Quindi (2) implica (1) non vale e questo a sua volta implica che neppure (2) implica (3) può valere perchè altrimenti da (3) implica (1) si potrebbe dedurre (2) implica (1). D'altra parte la prova che (1) implica (3) è contenuta nella prova che (1) implica (2).