

COMPITO di LOGICA MATEMATICA

16 marzo 2010

Nome:

Matricola:

Esercizio 1

Esibire un ticket per la seguente proposizione

$$((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \rightarrow (A \wedge (B \vee C))$$

che esprime una implicazione della distributività di una algebra di Heyting.

Soluzione.

Se w è un generico ticket per $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ allora possiamo ragionare per casi: se w è uguale a $i(h)$ per qualche h che sia un ticket per $A \wedge B$ allora $\pi_1(h)$ è un ticket per A e $\pi_2(h)$ è un ticket per B mentre se w è uguale a $j(k)$ per qualche k che sia un ticket per $A \wedge C$ allora $\pi_1(k)$ è un ticket per A e $\pi_2(k)$ è un ticket per C . Quindi il ticket cercato è

$$\lambda w. \text{ case } w \text{ of } \begin{array}{l} i(h) : \langle \pi_1(h), i(\pi_2(h)) \rangle \\ j(k) : \langle \pi_1(k), j(\pi_2(k)) \rangle \end{array}$$

Esercizio 2

Si determini quali tra le seguenti equivalenze sono valide intuizionisticamente e quali solo classicamente, fornendo una prova in deduzione naturale, e quali non sono valide neppure classicamente, fornendo quando necessario un opportuno controesempio.

1. $(A \rightarrow \neg(B \wedge C)) \equiv ((A \rightarrow \neg B) \vee (A \rightarrow \neg C))$
2. $\exists x.(A \rightarrow B(x)) \equiv A \rightarrow \exists x.B(x)$
3. $\forall x.(A(x) \vee B(x)) \equiv ((\forall x.A(x)) \vee (\forall x.B(x)))$

Soluzione.

Per quanto riguarda il primo esercizio l'implicazione da destra a sinistra vale intuizionisticamente. Infatti

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[A]_2 \quad [A \rightarrow \neg B]_3 \quad [B \wedge C]_1}{\neg B \quad B} \quad \frac{[A]_2 \quad [A \rightarrow \neg C]_3 \quad [B \wedge C]_1}{\neg C \quad C}}{\frac{\frac{\perp}{\neg(B \wedge C)} 1}{A \rightarrow \neg(B \wedge C)} 2} \quad \frac{\frac{\perp}{\neg(B \wedge C)} 1}{A \rightarrow \neg(B \wedge C)} 2 \\
 \hline
 (A \rightarrow \neg B) \vee (A \rightarrow \neg C) \quad \frac{\quad}{A \rightarrow \neg(B \wedge C)} 3
 \end{array}$$

L'altra implicazione ammette invece una prova classica che semplifichiamo utilizzando il "taccuino classico"

$$\begin{array}{c}
 [\neg((A \rightarrow \neg B) \vee (A \rightarrow \neg C))]_c \\
 \frac{\frac{\vdots}{\neg(A \rightarrow \neg B) \wedge \neg(A \rightarrow \neg C)} \quad \frac{\vdots}{\neg(A \rightarrow \neg B) \vee (A \rightarrow \neg C)}}{\neg(A \rightarrow \neg B)} \quad \frac{[\neg((A \rightarrow \neg B) \vee (A \rightarrow \neg C))]_c}{\neg(A \rightarrow \neg B) \vee (A \rightarrow \neg C)} \\
 \frac{\frac{\vdots}{A} \quad \frac{A \rightarrow \neg(B \wedge C)}{\neg(B \wedge C)}}{\neg(A \rightarrow \neg B)} \quad \frac{\frac{\vdots}{\neg(A \rightarrow \neg B) \wedge \neg(A \rightarrow \neg C)} \quad \frac{\vdots}{\neg(A \rightarrow \neg C)}}{\neg(A \rightarrow \neg B)} \\
 \frac{\frac{\vdots}{\neg B \vee \neg C} \quad \frac{[\neg B]_1 \quad \vdots}{\neg \neg B} \quad \frac{[\neg C]_1 \quad \vdots}{\neg \neg C}}{\perp} 1 \\
 \hline
 \frac{\perp}{(A \rightarrow \neg B) \vee (A \rightarrow \neg C)} c
 \end{array}$$

Tale prova non può essere trasformata in una prova intuizionista visto che l'implicazione si può falsificare nella seguente algebra di Heyting

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 a \\
 b \quad c \\
 0
 \end{array}$$

con l'interpretazione $V(A) = a$, $V(B) = b$ e $V(C) = c$.

Una prova intuizionista della implicazione da sinistra a destra della seconda proposizione è la seguente

$$\frac{\frac{\frac{[A]_1 \quad [A \rightarrow B(x)]_2}{B(x)}}{\exists x.B(x)} \quad \frac{\exists x.A \rightarrow B(x) \quad A \rightarrow \exists x.B(x)}{A \rightarrow \exists x.B(x)} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

mentre una prova classica dell'altra implicazione si può ottenere come segue utilizzando il “taccuino”

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x.\neg(A \rightarrow B(x))}}{\neg(A \rightarrow B(x))} \quad \frac{\frac{\vdots}{A} \quad A \rightarrow \exists x.B(x) \quad \frac{[B(x)]_1 \quad \neg B(x)}{\perp}}{\exists x.B(x)} \quad \frac{\frac{\vdots}{\neg(\exists x.A \rightarrow B(x))}_c \quad \frac{\frac{\vdots}{\forall x.\neg(A \rightarrow B(x))}}{\neg(A \rightarrow B(x))}}{\frac{\perp}{\exists x.A \rightarrow B(x)} \quad c} \quad \frac{\perp}{1}$$

Tale prova non può essere trasformata in una prova intuizionista visto che possiamo costruire il seguente controesempio su un dominio $D = \{h, k\}$ di due elementi sulla seguente algebra di Heyting

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & a & \\ b_1 & & b_2 \\ & 0 & \end{array}$$

con l'interpretazione $V(A) = a$, $V(B)(h) = b_1$ e $V(B)(k) = b_2$.

Per quanto riguarda infine il terzo punto una prova intuizionista dell'implicazione da destra a sinistra è la seguente

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x.A(x)]_1}{A(x)}}{A(x) \vee B(x)} \quad \frac{\frac{[\forall x.B(x)]_1}{B(x)}}{A(x) \vee B(x)} \quad \frac{\forall x.A(x) \vee \forall x.B(x) \quad \forall x.A(x) \vee B(x) \quad \forall x.A(x) \vee B(x)}{\forall x.A(x) \vee B(x)} \quad 1$$

mentre una prova dell'altra implicazione non può esistere visto che la si può falsificare su una struttura con un dominio $D \equiv \{a, b\}$ di due elementi su una algebra di Boole di due elementi utilizzando la seguente interpretazione $V(A)(a) = 1$, $V(A)(b) = 0$, $V(B)(a) = 0$ e $V(B)(b) = 1$.

Esercizio 3

Sia H un'algebra di Heyting e F un suo filtro.

- Dimostrare che $x \in F$ se e solo se $(x \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow x) \in F$.
- Dimostrare che F è un filtro massimale, cioè tale che se $x \notin F$ allora $\uparrow(F \cup \{x\}) = H$, se e solo se l'algebra H/F è l'algebra di Boole di due elementi.

Soluzione.

Per dimostrare il primo punto è sufficiente far vedere che $x = (x \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow x)$. Ora $x \rightarrow 1 = 1$, perchè $1 \leq x \rightarrow 1$ consegue da $x = 1 \wedge x \leq 1$ che vale per definizione, e quindi basta dimostrare che $x = 1 \rightarrow x$. Ma $x \wedge 1 = x \leq x$ e quindi $x \leq 1 \rightarrow x$ mentre l'altra disuguaglianza consegue dal fatto che $1 \rightarrow x \leq 1 \rightarrow x$ e quindi $1 \rightarrow x = (1 \rightarrow x) \wedge 1 \leq x$.

Per quanto riguarda invece il secondo punto dell'esercizio vediamo come dimostrare le due implicazioni richieste. Supponiamo quindi che F sia un filtro massimale. Ora, se $x \in F$ allora per il punto precedente $(x \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow x) \in F$ e quindi $[x] = [1]$. D'altra parte, se $x \notin F$ allora esiste $y \in F$ tale che $y \wedge x \leq 0$ e quindi $y \leq x \rightarrow 0$ da cui segue che $x \rightarrow 0 \in F$. Quindi $[x] \rightarrow [0] = [x \rightarrow 0] = [1]$ da cui segue che $[x] = [1] \wedge [x] \leq [0]$ che mostra subito che $[x] = [0]$.

Viceversa, se H/F ha solo due classi e $x \notin F$ allora $[x] = [0]$, visto che per il primo punto di questo esercizio solo gli elementi di F sono nella stessa classe di equivalenza del 1. Ma allora $(x \rightarrow 0) \wedge (0 \rightarrow x) \in F$ e quindi $x \rightarrow 0 \in F$ che implica che $0 = x \wedge (x \rightarrow 0) \in \uparrow(F \cup \{x\})$.